А. С. Пчелко

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

А. С. ПЧЁЛКО

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

Утверждено
Министерством просвещения РСФСР

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЁРТОЕ

МОСКВА • 1951

ПРЕДИСЛОВИЕ к 4-му ИЗДАНИЮ.

В предлагаемой «Методике преподавания арифметики» мы стремились собрать и до некоторой степени обобщить богатый и разнообразный опыт советской школы в области преподавания арифметики за последнее десятилетие. Перед нами также стояла задача привести в соответствие содержание «Методики» с последними выпусками программы.

Воздавая должное современному опыту передового советского учительства, дающего образцы высокого методического мастерства, мы вместе с тем использовали высказывания русских дореволюционных методистов — Арженикова, Егорова, Беллюстина и др., создавших ценную, во многом самобытную и оригинальную методику, отразившую в себе черты русского национального характера: ставку на смётку и сообразительность, на ясное понимание и сознательное усвоение изучаемого, на инициативу и самостоятельность в работе, на простоту и безыскусственность приёмов обучения. Эти традиционные черты русской методики мы стремились сохранить и в выпускаемой нами книге.

Создавая «Методику», мы имели в виду широкие слои учительства: начинающих и малоопытных учителей, равно как и учителей со стажем и опытом. В соответствии с запросами и интересами начинающих учителей в «Методике» даны подробные и конкретные методические разработки наиболее трудных вопросов программы, а также подробно изложены вопросы организации преподавания арифметики; в интересах учителей второй группы шире освещены некоторые принципиальные вопросы методики. Но в целом книга является для учителя практическим пособием.

При отборе методов и приёмов обучения арифметике автор отдавал предпочтение методам наиболее простым, общедоступным, быстрее ведущим к цели, имея в виду, что высокие задачи часто достигаются простыми средствами. Мы старались избегать всего того, что без нужды усложняет процесс обучения и замедляет темпы продвижения учащихся.

Материал изложен без распределения его по классам. В таком распределении нет необходимости. По оглавлению учитель легко найдёт всё необходимое для его класса, между тем поклассное распределение материала привело бы к неизбежным повторениям и к увеличению объёма книги.

При подготовке 4-го издания в книгу внесены на основании исследовательской работы автора некоторые поправки и изменения, уточняющие и дополняющие методические указания по ряду вопросов:

уточнён вопрос о проверке домашних заданий;

пересмотрен вопрос о решении задач несколькими способами;

задачи на движение дополнены задачами на движение двух тел в противоположных направлениях;

даны указания, как составлять и решать занимательные квадраты;

полнее изложен вопрос о делении по содержанию;

даны схемы типичных уроков при изучении таблицы умножения и табличного деления;

более конкретно и полно изложен вопрос об ознакомлении учащихся с понятиями разностного и кратного сравнения чисел, увеличение и уменьшение числа в несколько раз;

внесено уточнение в изложение вопроса «Понятие о площади».

При пользовании этой книгой следует иметь в виду, что текст, набранный петитом, является отнюдь не второстепенным и имеет такое же значение, как и основной текст книги.

Оставаясь глубоко убеждённым в том, что создание полноценной советской методики может быть только плодом совместных усилий представителей методической науки и учителей-практиков, автор попрежнему обращается к учителям с просьбой присылать замечания и предложения, направленные к улучшению книги, по адресу: Москва, Чистые пруды, 6, Учпедгиз, автору.

Автор.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ АРИФМЕТИКЕ.

Обучение арифметике в начальной школе преследует две главные цели: образовательно-воспитательную и практическую.

Образовательная цель заключается в том, чтобы дать учащимся ряд знаний, ряд элементарных математических понятий: понятие о числе — целом и дробном, отвлечённом и именованном, о составе и некоторых свойствах чисел; понятие об арифметических действиях и о некоторых свойствах действий; понятие о задаче и способах её решения; понятие о мерах и измерении. На основе этих понятий (а часто вместе с их формированием) даётся ряд знаний, умений и навыков: навыки устных и письменных вычислений, уменье решать задачи, уменье производить измерения. Все эти знания составляют содержание первой ступени математического образования, которая является основой изучения математики в средней школе.

Сообщение учащимся арифметических знаний должно вестись такими методами, которые способствуют всестороннему умственному и нравственному развитию учащихся. В этом состоит воспитательная задача обучения арифметике.

Изучение арифметики должно воспитывать ум, волю и чувства ребёнка, формировать у него коммунистическое мировоззрение.

Велика роль арифметики в умственном развитии учащихся, в развитии логического мышления, т. е. мышления определённого, последовательного, доказательного. Чтобы решить более или менее сложную арифметическую задачу, ученик должен мыслить логично. А так как решение задач красной нитью проходит через все уроки арифметики, то тем самым занятия арифметикой превращаются в значительной мере в логические упражнения: у учащихся вырабатывается уменье мыслить связно, последовательно; воспитывается привычка доказывать и обосновывать правильность своих суждений; развивается способность расчленять сложную проблему на её составные элементы и решать её по частям, добиваясь таким путём решения её в целом.

Изучая арифметику, дети приучаются сосредоточивать своё внимание на изучаемом, наблюдать отдельные факты и отношения, сравнивать и сопоставлять их между собой. При этом они научаются:

а) подмечать в наблюдаемом признаки сходства и различия;

б) выделять постоянные признаки и отбрасывать случайные;

в) объединять постоянные и существенные признаки в одно общее понятие.

В этом весьма важном *процессе абстрагирования и обобщения* учащиеся упражняются в течение всего курса. Так, начальная школа, обучая детей арифметике, закладывает у них основы отвлечённого мышления.

Вместе с мышлением развивается и *речь* ученика, поскольку развитие мышления теснейшим образом связано с развитием речи. Математическая речь характерна лаконичностью, ясностью, точностью. Учащиеся приучаются к точному употреблению арифметической терминологии, к правильной постановке вопросов и к точным ответам на них. «Успех в решении задач в первую очередь зависит от того, насколько правильно сформулирован вопрос. Понять задачу — это прежде всего значит *правильно поставить вопрос*, для чего иногда требуется немалая мыслительная работа»[1]. Уменье чётко и ясно ставить вопросы имеет большое познавательное и практическое значение, и для выработки этого уменья уроки арифметики дают благодарный материал.

Решение задач является первичной формой *творческой* исследовательской работы ребёнка. Творческий момент в решении задач выявляется очень ярко. «Ученик, которому удаётся найти решение математической задачи незнакомого ему типа, с психологической точки зрения проявляет творчество, хотя использованный им приём и не является новым в математике»[2]. Творческая деятельность ученика при решении задач связана с проявлением самостоятельности и инициативы в отыскании способа решения.

Решение задачи часто требует от ученика затраты больших *усилий*; на этой работе ученик учится преодолевать трудности и доводить начатое дело до конца. Это развивает и дисциплинирует *волю* ребёнка.

В решении задач, как и во всякой творческой работе, большую роль играет деятельность *воображения*. Читая условие задачи, ученик должен возможно яснее представить себе данную в ней арифметическую ситуацию, представить факты и процессы, изложенные в задаче, в их связи и взаимодействии. А дальше, уяснив сущность поставленного вопроса, ученик мысленно намечает ход решения, намечает план последовательных действий, которые должны привести к ответу на вопрос задачи.

---

[1] Б. М. *Теплов*, Психология. Учебник для средней школы, 1946, стр. 152.

[2] *Там же*, стр. 187.

Таким образом, решение задачи является результатом совместной деятельности мышления и воображения. И если решение задач способствует развитию мышления учащихся, то в такой же мере оно способствует и развитию сопутствующего ему творческого воображения.

Занятия арифметикой — хорошее средство воспитания у детей полезных навыков и привычек: точности, аккуратности, самопроверки, привычки к чистоте, к применению наиболее рациональных приёмов в работе.

Арифметика — наука точная. Требование точности красной нитью проходит через всю работу по арифметике. Всякая неточность воспринимается в работе по арифметике как пробел, как ошибка. Учителю нужно использовать эту особенность арифметики для приучения учащихся к абсолютной точности в математических операциях.

Все занятия арифметикой должны проходить под лозунгами: «Экономь время, применяй наиболее рациональные приёмы в работе. Вычисляй устно там, где это возможно, не прибегая к записи вычислений. Вычисляй по возможности быстро. Не решай задачу в 3—4 действия, если её можно решить двумя действиями. Решая задачу, выбирай наиболее лёгкий и скорый способ решения. Не пиши начерно, если можно сразу набело решить пример или задачу: не занимайся лишним переписыванием».

Занятия арифметикой нужно использовать для воспитания у учащихся привычки к самопроверке, которая предупреждает ошибки и даёт уверенность в правильности проделанной работы. «После решения примера проверь результат. Решив задачу и получив ответ, проверь его, просмотри ещё раз ход решения задачи, сопоставь его с условием, сравни ответ с вопросом. «Умел ошибиться, умей и поправиться»,— гласит народная поговорка. Не спеши заглядывать в ответы, а умей проверить себя без ответа».

Занятия арифметикой приучают к чистоте и аккуратности, которые составляют непременное качество культурного человека. Тетрадь — постоянный спутник ученика в его работе. От ученика требуется чёткое и красивое письмо цифр, симметричное расположение записей, правильная запись арифметических действий; благодаря этому тетрадь делается могучим средством воспитания культурных привычек. Если учитель добьётся того, что его ученики будут способны любоваться чистотой тетради своей и своих товарищей, он выполнит большую задачу воспитательного характера.

Преподавание арифметики должно способствовать идейно-политическому воспитанию учащихся, воспитанию у них коммунистической морали, чувства советского патриотизма и национальной гордости. Правильно поставленное преподавание арифметики может оказать большое влияние на формирование морального облика советского школьника.

Это осуществляется через задачи. В сюжетном содержании многих арифметических задач находит своё отражение практика социалистического строительства, борьба за осуществление пятилетнего плана. Числовые данные в таких задачах характеризуют собой широкий размах социалистической стройки, энтузиазм советского народа в борьбе за выполнение задач, поставленных партией и правительством. Язык цифр убедителен не только для взрослых, но и для детей. Они (цифры) дают детям возможность почувствовать героику труда, увидеть высокие качества и преимущества советских людей: мировые рекорды советских лётчиков

и советских спортсменов, рекорды и достижения наших стахановцев промышленности и социалистического земледелия. Всё это наполняет сердца детей чувством национальной гордости и воспитывает у них чувство советского патриотизма.

Особенность содержания программы по арифметике для начальной школы состоит в том, что всё это содержание находит постоянное, широкое и непосредственное применение в практической жизни. Счёт, вычисления, измерения, денежные расчёты, выливающиеся в форму решения несложных арифметических задач,— со всем этим приходится встречаться ребёнку в жизни повседневно. Поэтому школа, разрешая образовательные и воспитательные задачи, в то же время вооружает детей такими знаниями, навыками и уменьями, которые имеют большое практическое значение: а) хорошими навыками в устном счёте, имеющем широкое применение в жизни; б) твёрдым знанием мер и уменьем измерять, так как Советскому государству необходима весьма высокая измерительная культура; в) уменьем хорошо решать задачи с жизненным содержанием, часто встречающимся в практике.

Чтобы знания, получаемые детьми в школе, были действенными и легко приложимыми к жизни, школа должна давать учащимся достаточно много практических упражнений в решении задач, в измерениях не только в классе, но и на открытой местности, в решении вопросов, вытекающих из нужд класса, школы, окружающей жизни. Применение теории на практике должно являться неотъемлемой составной частью процесса обучения арифметике.

Таким образом, преподавание арифметики в советской школе имеет своей целью оказать всестороннее воздействие на ребёнка, на развитие широкого круга его способностей и дарований. Ставя своей основной задачей — дать ученику строго определённую сумму первоначальных математических знаний и навыков, школа в то же время использует обучение этому предмету для умственного и нравственного развития учащегося, для привития ему навыков и привычек общекультурного значения.

Осуществление этих целей и задач в практике обучения представляет собой единый и целостный процесс, в котором эти цели выступают в гармоническом сочетании и тесном взаимодействии.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

АНАЛИЗ ПРОГРАММЫ ПО АРИФМЕТИКЕ.

Программа является государственным документом, определяющим содержание и направление в работе по арифметике. Полное и точное выполнение программы обязательно для каждого учителя, в каких бы условиях он ни работал. Но чтобы про-

грамму выполнять, её нужно хорошо знать. Знать программу — это значит: 1) знать содержание программы в целом и по каждому классу в отдельности, 2) знать объём каждого основного раздела программы — устный счёт, письменные вычисления, решение задач, 3) знать систему расположения программного материала по основным его разделам.

Программа изложена кратко в форме названий тем и разделов; последние подробно раскрываются в задачниках и методике арифметики. Поэтому, чтобы хорошо знать программу, нужно изучить: а) текст программы; б) объяснительную записку к ней, где изложены принципы построения программы и даны основные методические указания; в) содержание задачников.

Содержание и объём программы. Содержание программы по арифметике составляют следующие основные разделы:

а) нумерация и четыре действия над целыми отвлечёнными числами;

б) меры и четыре действия над составными именованными числами;

в) понятие о дроби, преобразования и действия над дробными числами;

г) элементарные сведения из практической, наглядной геометрии;

д) задачи.

Чтобы формирование понятий и усвоение вычислительных приёмов проходило последовательно, постепенно, курс начальной арифметики изучается по ступеням, концентрами. 1-й концентр составляют счёт, сложение и вычитание в пределе 10; 2-й концентр — нумерация и четыре действия в пределе 20; 3-й концентр — нумерация и четыре действия в пределе 100; 4-й концентр — нумерация и четыре действия в пределе 1 000; 5-й концентр — нумерация и четыре действия над числами любой величины. При таком расположении арифметического материала понятия, даваемые учащимся в каждом концентре, имеют ту степень отвлечённости и общности, которая соответствует умственному развитию учащихся. При этом каждый концентр, давая учащимся новые знания, охватывает вместе с тем все предыдущие ступени. Благодаря этому ученик возвращается к одному и тому же понятию неоднократно и овладевает им сознательно и прочно.

Изучению действий над составными именованными числами предшествует обстоятельное знакомство с мерами. Это знакомство даётся, начиная с I класса, наглядно, конкретно и постепенно. Постепенность в ознакомлении с мерами, использование их в процессе измерения и в решении задач обеспечивают твёрдое и вполне конкретное их усвоение.

Действия с составными именованными числами выделяются в особый концентр, который изучается после четырёх действий с многозначными отвлечёнными числами. Различаются действия

над метрическими именованными числами и действия над числами, обозначающими меры времени. Первые — легче, вторые — значительно труднее. Поэтому действия над метрическими мерами изучаются раньше, действия с мерами времени — позже.

Знакомство с дробями даётся после основательного изучения арифметики целых чисел. Сначала изучаются доли:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}.$$

Эти доли легко и просто получить, они вполне конкретны и легко обозримы, легко подвергаются преобразованиям — раздроблению и превращению. Поэтому на них удобно дать понятие о дроби.

Введение наглядной геометрии в IV классе имеет целью развить у детей пространственные представления и дать им элементарные практические навыки в области измерения. Изучая геометрический материал, учащиеся знакомятся с квадратными и кубическими мерами, с вычислением площади прямоугольных фигур и объёма тел, имеющих форму куба и прямоугольного параллелепипеда. Для большей конкретизации геометрических знаний, получаемых на уроках, и для вооружения учащихся измерительными навыками объяснительная записка рекомендует проводить простейшие измерительные работы на местности.

Красной нитью через всю программу проходит решение задач. Им уделяется около половины учебных часов, отведённых на арифметику.

В программе различаются простые и составные (сложные) арифметические задачи, тесно связанные с изучением арифметических действий, и задачи, решаемые особыми способами (типовые). Первые решаются на протяжонии всего курса обучения, вторые сосредоточены главным образом в III и IV классах. Арифметические задачи постепенно усложняются количеством действий; в I классе указаны задачи в 1—2 действия, во II классе — в 1—3 действия, в III и IV классах количество действий увеличивается до 5—6.

Отбор типовых задач сделан с учётом сложности способов их решения и доступности их для учащихся, начиная с задач на простое тройное правило, решаемых способом приведения к единице, и кончая задачами, решаемыми способом исключения одной из величин.

С и с т е м а р а с п о л о ж е н и я м а т е р и а л а в п р о г р а м м е.

В системе программы нашла своё отражение логика развития арифметики как учебного предмета: постепенно и последовательно раскрываются в ней понятия об арифметических действиях — их смысл, цели, основные свойства и способы выполнения; такой же генетический ряд, в котором одно понятие постепенно рождается из других, составляют и задачи: сначала решаются про-

стые задачи, потом — составные; сначала учащиеся овладевают общими приёмами решения задач, потом — особыми способами.

Вместе с тем при расположении материала в программе учитывается и возрастная психология учащихся. Требованиями психологического порядка продиктовано: а) концентрическое расположение материала; б) введение пропедевтики дробей перед систематическим курсом; в) введение пропедевтики геометрии; г) ознакомление сначала с действиями над метрическими мерами, потом — с действиями над мерами времени; д) изучение в первом концентре только двух более лёгких для учащихся действий — сложения и вычитания, с отнесением умножения и деления, как более трудных действий, ко второму концентру.

Особенности детского восприятия и мышления (конкретность и образность мышления) нашли своё выражение и в классификации типовых задач, которые расположены по типам не только на основании методов решения, но и по содержанию, и по методу рассуждения; так, например, среди типовых задач выделены задачи на движение. Несомненно, что многие типы задач могли бы быть объединены в более общие группы, однако широкие обобщения не сделаны, так как для детей начальной школы они были бы преждевременны.

Распределение материала по классам. Целые числа располагаются по классам следующим образом:

Основное содержание курса I класса составляют первый и второй десяток и решение задач в 1—2 действия. Кроме них, в программу включена нумерация до 100 и четыре действия над круглыми десятками. В этом классе дети овладевают полностью таблицами сложения и вычитания в пределе 20, начинают изучение таблиц умножения и деления и накапливают конкретные представления о свойствах арифметических действий.

Во II классе основное содержание курса составляет концентр «Первая сотня» и все действия над круглыми сотнями и десятками из концентра «Тысяча», а также решение задач в 1—3 действия. В этом классе дети усваивают таблицы умножения и деления, овладевают основными приёмами устных вычислений.

В III классе учащиеся овладевают навыками письменных вычислений с числами любой величины, уменьем решать арифметические задачи сложностью до 5 действий и некоторые типовые задачи.

В IV классе углубляются и оформляются понятия об арифметических действиях: изучается соотношение между прямыми и обратными арифметическими действиями, зависимость между данными и результатами действий, изменение результатов в зависимости от изменения данных. Закрепляются и расширяются навыки решения задач обыкновенных арифметических и типовых — большей сложности.

Знакомство с простейшими дробями даётся в IV классе; здесь учащиеся знакомятся с обыкновенными дро-

бями: с половиной, четвертью, восьмой, пятой и десятой долями; из них составляются дроби; рассматриваются способы раздробления и превращения долей; изучается сложение и вычитание дробей, составленных из равных и кратных долей. Решаются задачи с дробными числами.

Сведения о мерах и практические упражнения в измерении располагаются по классам так:

В I классе дети получают первые представления о метре о килограмме и литре и учатся измерять этими мерами.

Во II классе область измерения расширяется: дети знакомятся с километром, с мерами веса (килограмм и грамм) и с мерами времени, обучаясь измерению этими мерами.

В III классе меры, изученные в предшествующих классах, дополняются некоторыми новыми и систематизируются в таблицах; здесь же учащиеся упражняются в раздроблении и превращении именованных чисел.

В III и IV классах изучается геометрический материал: прямая и отрезок, углы, квадрат и прямоугольник. На основе этих понятий даётся знакомство с мерами площадей и проводятся упражнения в измерении площадей прямоугольных фигур. В этом классе даётся также понятие о кубе и прямоугольном параллелепипеде, знакомство с кубическими мерами, проводятся упражнения в измерении объёма тел, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, и в простейших измерениях на местности.

В IV классе изучаются четыре действия над составными именованными числами.

Объём программы по арифметике установлен на основе долголетнего опыта работы школ нашей страны. Он вполне реален в смысле его выполнимости, так как соответствует уровню общего развития учащихся и тому времени, которое отведено на арифметику в учебном плане школы. Следует, однако, помнить, что выполнение программы требует от учителя применения рациональных м е т о д о в обучения и хорошей о р г а н и з а ц и и преподавания.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ АРИФМЕТИКЕ.

Образование арифметических понятий и усвоение знаний по арифметике представляет собой длительный и сложный п р о ц е с с, имеющий своё начало, развитие и завершение.

В этом процессе надо различать:

а) первоначальное знакомство с новым материалом и осмысливание его содержания;

б) усвоение знаний путём запоминания, заучивания;

в) приобретение навыков и умений посредством упражнений;

г) закрепление знаний и навыков путём повторения;

д) применение знаний и навыков на практике.

Таким образом, учащийся, усваивая то или иное знание, проходит длинный и сложный путь — от первоначального знакомства с новым понятием до окончательного овладения им и применения его на практике. На этом пути ученик обогащается математическими представлениями, понятиями, знаниями, уменьями, навыками. При получении новых знаний от ученика требуется полное понимание и сознательное усвоение изучаемого материала. Знания ученика должны быть точными, конкретными, хорошо осознанными, действенными и прочными. К навыкам предъявляются те же требования; кроме того, они должны быть в известном смысле автоматизированными. Чтобы знания учащихся обладали этими качествами, учитель должен уметь хорошо объяснять новые понятия и хорошо упражнять учащихся в приобретении ими навыков. Методами объяснения и методами упражнения учителю нужно владеть в совершенстве.

МЕТОДИКА ОБЪЯСНЕНИЯ.

Требования к методике объяснения арифметического материала могут быть сформулированы в виде немногих положений, которые, соответствуя принципам советской дидактики, отражают специфику арифметических понятий. Главные из них следующие:

1. **Расчленение сложных арифметических понятий и навыков на составные элементы.** Каждое арифметическое понятие, каждый более или менее сложный навык состоит из отдельных элементов. Эти элементы усваиваются учащимися постепенно и последовательно. От учителя требуется уменье расчленять сложное, целое на его составные части и располагать их для объяснения в таком порядке, при котором достигается постепенное нарастание трудности, и каждая предыдущая ступень является опорой, основой для последующей.

Если учитель хорошо знает составные части каждого раздела или каждой темы, умеет целесообразно расчленять материал на части и удачно распределять его на уроки, он этим самым обеспечивает своим учащимся лёгкость восприятия и ясность понимания. «Тот хорошо учит, кто хорошо расчленяет»,— говорили представители древней педагогики.

2. **Объединение отдельных элементов в целое и формулировка вывода, правила.** Для ясного понимания необходимо не только расчленение, но и объединение отдельных элементов в одно целое. После работы над отдельными элементами знания последние нужно связать, объединить между собой по общим сходным признакам. Объединение происходит в форме обобщения и часто сопровождается формулировкой арифметического правила.

В обобщении находит своё выражение переход от конкретного и единичного к общему, отвлечённому. В процессе обобщения подчёркиваются существенные, характерные, типичные признаки понятия, благодаря чему углубляется его понимание. Уроки, посвящаемые объяснению нового материала, в большинстве случаев заканчиваются доступными детям обобщениями.

3. **Установление связи нового со старым.** Чтобы понять новое, надо уяснить, в какой связи находится это новое с тем, что уже хорошо известно. Сущность понимания и состоит в осознании связей новых знаний с ранее приобретёнными и более элементарными. Отсюда следует, что перед объяснением нового материала нужно установить, с какими ранее изученными понятиями связано то новое, что подлежит объяснению. Установив это, выявив те понятия, которые при объяснении нового будут служить исходными, опорными, нужно воспроизвести их в памяти учащихся, нужно их основательно *повторить*. Это повторение обычно проводится или заранее, на предшествующих уроках, или чаще всего на том уроке, на котором даётся объяснение нового материала.

4. **Применение наглядности и использование личного опыта учащихся.** Раскрытию арифметического содержания нового понятия и установлению его связи с другими понятиями, уже известными ученику, помогает применение *наглядных пособий*. В наглядных пособиях конкретно показываются те количественные отношения, которые служат в арифметике предметом изучения. При обучении младших школьников наглядность — главный путь к установлению указанной связи (в старших классах к ней присоединяются ещё и несложные, доступные детям рассуждения). Наглядность облегчает ребёнку понимание нового ещё и потому, что ребёнок, поступающий в школу, мыслит конкретно; он ещё не может оторваться в своих суждениях от предмета или от предметного образа.

Поэтому учитель в объяснении нового должен опираться на наглядность. И чем моложе школьники, тем нагляднее должно быть объяснение.

Той же цели, т. е. достижению ясности понимания, способствует использование учителем личного *опыта* ребёнка. Привлекая, при объяснении нового, личный опыт учащихся, учитель как бы сближает теорию с практикой; примеры из жизненного опыта ребёнка помогают ему установить связь между изучаемым понятием и тем, что ему хорошо знакомо из обыденной жизни. Благодаря этому ученик яснее представляет себе содержание нового понятия.

5. **Целесообразный подбор примеров и задач.** Основным материалом в арифметике при объяснении новых понятий служат числовые примеры и задачи. Чтобы обеспечить учащимся лёгкость восприятия и ясность понимания, нужно для объяснения нового подбирать такие примеры или задачи, в которых отчётливо выступают на первый план наиболее существенные признаки нового

понятия. Примеры и задачи должны кратчайшим и более лёгким путём вести ученика к обнаружению изучаемых закономерностей. В то же время порядок расположения рассматриваемых примеров и задач должен намечать путь к обобщениям и выводам.

6. **Анализ и синтез, индукция и дедукция в процессе объяснения.** Накопление знаний — это накопление общих представлений, понятий. Образование же понятий происходит в процессе обобщений. Но прежде чем обобщать, нужно выделить в изучаемом существенные признаки, нужно найти в нём необходимые связи, существенные зависимости, нужно найти элементы сходства и различия. Это достигается путём анализа и синтеза. Анализ — это расчленение целого на части. Синтез, наоборот,— соединение частей в целое. Без применения анализа было бы невозможным овладение арифметическими знаниями. К анализу приходится прибегать как при решении задач, так и при решении примеров. Чтобы объяснить решение сложной задачи, нужно расчленить её на ряд простых задач; чтобы объяснить умножение на двузначное число, полезно расчленить его на десятки и единицы и показать умножение числа на каждый разряд в отдельности и т. д. Анализу сопутствует синтез. Учитель не может остановиться только на расчленении целого на части и рассматривать эти части изолированно, а должен каждую часть ставить в связь с целым. Вслед за расчленением сложной задачи на простые идёт попарное соединение числовых данных для последовательного решения этих простых задач, что приводит в конечном счёте к получению ответа на вопрос задачи. Вслед за умножением числа на каждое разрядное число множителя в отдельности показывается, как эти отдельные искусственно расчленённые операции объединяются в одной записи.

При таком применении анализа и синтеза учитель обогащает познания учеников более широкими, точными и богатыми по содержанию представлениями.

При сообщении учащимся новых знаний, при объяснении нового материала учитель может вести учащихся по одному из двух путей. Учитель предлагает учащимся ряд отдельных задач или отдельных примеров (иначе говоря, ряд частных конкретных математических фактов); эти факты учащимися наблюдаются, сравниваются, подвергаются анализу, и таким путём из рассмотрения единичных фактов делаются общие выводы, формулируются правила. Такой метод познания, когда мысль ученика движется от единичного к общему, от частных суждений к общим, называется индуктивным методом (индукция — рассуждение, восходящее от частных суждений к общим). Индуктивный метод находит частое применение при обучении начальной арифметике. Все первичные понятия вырабатываются этим методом. Решая подобранные в определённой системе примеры, решая определённого вида задачи, ученики подмечают их общие свойства, улавливают скрытые в них закономерности и формулируют их в виде правила или

определения. (Впрочем, в младших классах не всегда подмеченные в рассуждениях закономерности обобщаются в форме правила, иногда они остаются в скрытом виде, но от этого сущность индуктивного метода не меняется.)

Существует и другой путь познания, когда мысль познающего движется от общего к частному. Общие суждения, выводы и правила в свою очередь могут служить основой для частных суждений, для получения новых знаний.

Рассуждения, нисходящие от общих суждений к частным, называются дедуктивными, а метод обучения, основанный на дедукции, можно назвать дедуктивным методом.

Дедукция в сочетании с индуктивными суждениями имеет применение и в начальной школе. Когда учащийся, решая примеры, подводит данный пример под то или иное правило и в соответствии с этим выбирает способ вычислений, его суждения носят дедуктивный характер. Когда, решая задачи, ученик узнаёт в данной задаче задачу известного ему типа и в соответствии с этим составляет план её решения, его мышление протекает в плане дедукции, ибо он в своих рассуждениях исходит из общих суждений. Чтобы отнести данную задачу к тому или иному типу, чтобы применить известное правило к решению данного примера, ученик должен проделать большую мыслительную работу, а именно: он должен уметь найти и выделить в данном конкретном случае (примере, задаче) те существенные признаки и свойства, которые характеризуют общее понятие (тип задачи, правило решения того или иного вида примеров), по отношению к которому данный факт является частным случаем. Благодаря такой аналитической работе, свойства, качества и признаки общего понятия осознаются учащимися более отчётливо и полно. В этом заключается познавательное значение дедукции.

7. **Вопросо-ответная форма обучения.** Знания по арифметике учитель сообщает учащимся начальной школы преимущественно в вопросо-ответной форме. Желая выяснить то или иное понятие, учитель ставит перед учащимися ряд вопросов, на которые ученики должны давать ответы, и эти ответы подводят учащихся к тем выводам и обобщениям, которые составляют содержание объясняемого понятия. Достоинство такой формы объяснения заключается в том, что при помощи её легко приковать внимание детей к предмету объяснения, легко вызвать самодеятельность учащихся. Вопросы заставляют учащихся думать, дают их мысли определённое направление, держат учащихся в состоянии творческого напряжения. По ответам учеников учителю легко судить, насколько правильно они понимают и усваивают то, что объясняется.

Использование вопросо-ответной формы не исключает, однако, необходимости прибегать иногда при объяснении к краткому и связному изложению; так, после прохождения темы в вопросо-ответной форме полезно привести в связь отдельные её части и систематизировать сообщённые знания с помощью связного рас-

сказа. Точно так же при объяснении отдельного вопроса, когда учащиеся затрудняются в ответах, учителю можно хорошо и просто изложить свою мысль, а затем при помощи вопросов проверить, насколько она правильно понята учащимися.

8. **Пример объяснения.** Покажем практическое приложение вышеуказанных принципов на примере объяснения учащимся переместительного свойства произведения: «От перемены мест сомножителей произведение не изменяется».

Знакомство с этим свойством в самом начале объяснения даётся н а г л я д н о: учащиеся воспринимают его на равных прямоугольниках, разделённых на клетки (рис. 1).

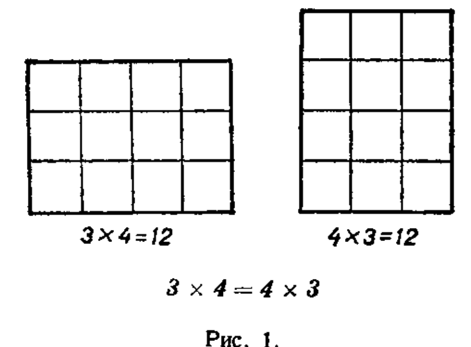


Рис. 1.

«Подсчитаем, — говорит учитель,— сколько клеток в каждом прямоугольнике». Подсчёт ведётся столбиками: в первом прямоугольнике 4 столбика, в каждом столбике 3 клетки. Значит, клеток будет 4 раза по 3, или $3\times4=12$. Во втором прямоугольнике в каждом столбике по 4 клетки, а всего столбиков 3; значит, всего клеток будет 3 раза по 4, или $4\times3=12$. Сравним оба примера: оказывается, число клеток в обоих прямоугольниках одинаково; 3 умножить на 4 — всё равно, что 4 умножить на 3. Результат получается одинаковый (12). Это можно записать так: $3\times4=4\times3$.

Учащиеся пока что восприняли только отдельный, конкретный математический факт. У них ещё нет оснований рассматривать и толковать этот факт как общее свойство всякого произведения. Да и самый факт этот ещё недостаточно осознан. Для его осознания надо провести добавочную работу примерно в следующем плане. Записав оба полученных примера на классной доске:

$$3\times4=12$$
$$4\times3=12$$

надо их сравнить, сопоставить, чтобы обнаружить, что в них есть общее, сходное, и в чём заключается их различие. Простое наблюдение показывает, что в обоих примерах даны одни и те же числа — 3 и 4, получилось одно и то же произведение — 12. В этом сходство обоих примеров — это их общее. В чём же различие этих примеров? В порядке чисел: в первом примере 3 умножено на 4, а во втором 4 умножено на 3. Во втором примере числа переменились местами: то, что в первом примере стоит на первом месте, во втором примере стало на второе место и наоборот. Дальше сравнение переходит в анализ обоих примеров: что изменяется и

что остаётся без изменения в данной паре примеров. Не меняются числа: в обоих примерах одни и те же числа, один и тот же результат. Изменяются места чисел или сомножителей.

Из этого анализа можно сделать вывод, но он будет сугубо частным и имеет силу только по отношению к данной паре примеров. (В этих двух примерах от перемены мест чисел результат не изменился.)

Обобщим теперь этот вывод, покажем, что этот вывод есть общее свойство всякого произведения. Для этого возьмём вторую пару примеров с другими числами и напишем рядом с ней пару примеров, уже анализированных:

$$6 \times 5 = 30 \qquad 3 \times 4 = 12$$
$$5 \times 6 = 30 \qquad 4 \times 3 = 12$$

Сравним обе пары примеров и установим, в чём их сходство и в чём различие. Сходство: в обеих парах меняются места чисел, но от этого произведение не меняется. Различие: каждая пара имеет свои числа — в первой 5 и 6, во второй 3 и 4.

Из этого сравнения теперь уже можно сделать обобщение (перейти от конкретного и единичного к общему, отвлечённому): «От перемены мест сомножителей произведение не меняется». Или в более простой формулировке, доступной для учащихся II класса: «При умножении можно менять места чисел, и от этого результат не меняется».

Последним этапом работы по уяснению свойства произведения будет переход от общего, отвлечённого вывода к конкретному, единичному. Это делается на решении задач и примеров.

Для данного случая можно взять примерно следующую задачу: «На одном участке посадили 8 рядов яблонь по 10 яблонь в каждом ряду, а на другом участке — 10 рядов по 8 яблонь в каждом. На каком участке посажено яблонь больше?» Записав решение, ученики должны без вычисления, на основании предыдущего вывода, ответить, что на обоих участках посажено яблонь поровну. Почему? Пример: «Ответить, не вычисляя, что больше: 7×9 или 9×7, 9×6 или 6×9. Почему должен получиться одинаковый результат?»

Вся эта работа должна привести учащегося к полному и ясному пониманию переместительного свойства умножения. Значение такой работы велико: ученик при этом не только осмысливает изучаемый вопрос, но он вместе с тем постепенно усваивает приёмы научного мышления, переходя от частных суждений к общим, и, наоборот, от общих суждений к частным.

ЗАПОМИНАНИЕ. ЗАУЧИВАНИЕ ПО УЧЕБНИКУ.

Заучиванию и усвоению наизусть в курсе начальной арифметики подлежат: таблицы сложения и вычитания в пределе 20 в I классе, таблицы умножения и деления во II классе, таблицы мер длины, веса, времени в III классе, таблицы квадратных и ку-

бических мер в IV классе, различные определения и правила во всех классах.

Материал для заучивания надо давать после того, как он объяснён учащимся и понят ими. Экспериментальные исследования показали, что при осмысленном заучивании запоминалось во много раз больше материала, чем в том случае, когда запоминание носило неосмысленный характер. Вот почему, прежде чем давать таблицы для заучивания, надо объяснить ученикам, как получаются эти таблицы, как воспроизвести результат, если он забыт.

Для того чтобы облегчить учащимся запоминание большого материала, надо выделять и подчёркивать в нём главное, основное, то, что может послужить опорой для запоминания всего остального. Так, если ученик твёрдо знает, что «пятью шесть — тридцать», ему легко запомнить, что «семью шесть — сорок два», «восемью шесть — сорок восемь» и т. д. Если ученик знает, что $8+8=16$, $7+7=14$ (а это легко запомнить), то ему нетрудно усвоить, что $8+9=17$, $7+8=15$ и т. д. Надо учить ученика связывать новое с тем, что он уже хорошо знает.

Запоминание таблиц и правил достигается в значительной мере при помощи упражнений и многократных повторений различных случаев таблицы при решении примеров и задач. Наряду с этим надо давать учащимся и специальные задания — заучить тот или иной параграф, ту или иную часть таблицы, то или иное правило.

После того как правило выведено, сформулировано и повторено учащимися, это правило должно быть прочитано по учебнику и дано учащимся на дом для усвоения наизусть.

Учащиеся должны хорошо знать тот минимум определений и правил, который содержится в принятых для начальных школ учебниках. От учащихся нужно требовать близкого к тексту запоминания и воспроизведения определений и правил, так как это приучает детей точно, коротко и правильно формулировать математические предложения. Формулируя то или иное определение, ученик должен уметь проиллюстрировать его на соответствующем примере. При формулировке или применении правила нужно время от времени требовать от учеников, чтобы они воспроизводили те рассуждения, на основе которых правило выведено.

МЕТОДИКА УПРАЖНЕНИЙ.

Для успешного обучения арифметике учителю нужно не только хорошо о б ъ я с н я т ь материал, но и уметь хорошо проводить у п р а ж н е н и я. Многие арифметические знания должны претворяться в уменье, в н а в ы к и: таковы вычислительные навыки, занимающие в обучении арифметике большое место, измерительные навыки, навыки преобразования чисел. Навыки эти приобретаются посредством у п р а ж н е н и й. В процессе упражнений навык формируется, закрепляется и в известном смысле автомати-

зируется. Автоматизация навыка означает, что соответствующая операция может выполняться учащимся без активной деятельности сознания в момент её выполнения; но это не значит, что учащийся может перестать сознательно относиться к способам и приёмам выполнения действия; наоборот, «вырабатывая автоматизированные способы решения примера, учащийся не должен терять возможности в любой момент, когда это понадобится, осознавать эти способы; он должен сохранять возможность сознательного контроля над ними»[1].

Вообще упражнениями достигаются две цели: с одной стороны, благодаря им выполнение действия становится всё более и более правильным, лёгким, скорым, автоматичным, а с другой стороны, многократное повторение одинаковых операций приводит к лучшему, более глубокому их пониманию.

Итак, задача упражнений состоит в том, чтобы посредством повторения одних и тех же операций создавать и непрерывно совершенствовать навык. Но не всякое повторное выполнение действия приводит к этой цели. «Люди с плохим почерком пишут всю свою жизнь... однако почерк их не улучшается от этого; здесь имеет место постоянное повторение, но не имеют места упражнения»[2].

Чтобы упражнения достигали своей цели, они должны удовлетворять следующим требованиям:

1) Ученику необходимо ясно представлять себе, чего он должен добиться в результате упражнений. Учитель должен показать ученику образец той правильности, тщательности, скорости, с какой он должен решать пример, решать задачу, и этот образец должен быть в сознании ученика, когда он выполняет упражнения.

2) После каждого отдельного упражнения ученик должен знать его результаты, чувствовать своё продвижение, знать, чего он достиг и какие недочёты или ошибки ему остаётся ещё преодолеть. На них учитель должен указать и поставить задачи для дальнейших упражнений. «Ты стал уже лучше писать цифру 7; у тебя хорошо получается волнистая линия и палочка. Теперь нужно научиться лучше писать «узелок», делая его посредине палочки». Или: «Ты уже хорошо решаешь примеры на вычитание: хорошо подписываешь числа, правильно производишь вычисления. Теперь надо научиться всё это делать быстрее» и т. п.

3) В первоначальных упражнениях, следующих за объяснением учителя, ученик подробно воспроизводит те рассуждения, которыми учитель сопровождал своё объяснение. Но по мере овладения навыком эти рассуждения должны становиться всё короче и схематичнее; ученик научается пользоваться общепринятыми, краткими, часто условными выражениями (например:

---

[1] Б. М. Теплов, Психология. Учебник для средней школы, 1946, стр. 191.

[2] Там же, стр. 192.

«трижды — восемь» — в таблице умножения: «сношу следующую цифру» — при делении многозначного числа; «пять пишу, а четыре — в уме» — при умножении многозначных чисел; «от шести отнять восемь нельзя, занимаю одну сотню» — при вычитании и т. п.). В упражнениях не должно быть места многословию.

4) Первые упражнения проводятся под руководством учителя, при его помощи и по его указаниям. Но чем дальше, тем больше самостоятельности должно быть в работе учащихся. Упражнения в решении примеров, в решении задач должны сопровождаться и заканчиваться самостоятельной работой учащихся; в такой работе ученик познаёт свои силы, приобретает уверенность в своих действиях и проявляет инициативу и творчество в той мере, на какую он способен.

5) Во всё время упражнений учитель должен поддерживать у учащихся большой интерес и внимание к ним; для этого он должен разнообразить упражнения, придавая им различную форму; в младших классах некоторые упражнения могут носить характер игр; простые примеры должны сменяться решением сложных примеров; упражнения в решении однотипных задач должны заканчиваться решением комбинированных задач; большим разнообразием форм должны отличаться упражнения в устных вычислениях.

Различные варианты примеров и задач не только усиливают интерес к упражнениям, но и углубляют понимание вопроса, так как через различие сильнее подчёркивается общность изучаемого правила, единство принципа решения.

6) В создании прочного и устойчивого навыка большое (если не решающее) значение имеет количество упражнений. Хороший навык в решении примеров и задач получается в результате только достаточно большого количества решённых задач и примеров на каждое данное правило. Очевидно, чем сложнее навык, тем больше упражнений требуется для овладения им, и наоборот. Нарушение этого требования на практике приводит к ошибочным вычислениям и к слабому решению задач. В вопросе о количестве упражнений следует избегать двух крайностей: 1) недооценки упражнений и, как следствие этого, поспешного перехода от одного навыка к другому, 2) излишне большого числа упражнений в данном навыке, неоправданного его трудностью. Для увеличения количества упражнений должны быть использованы домашние задания; ценность последних состоит и в том, что упражнения в этих условиях выполняются самостоятельно. Достаточно или недостаточно дано упражнений — об этом можно судить по наблюдениям и по результатам контрольной работы.

7) На образование правильного и устойчивого навыка влияет не только количество упражнений, но и распределение их во времени. Наблюдение показывает, что наилучшие результаты получаются при такой организации обучения, когда вслед за

объяснением учителя даётся достаточно много упражнений, а дальше работа над изученным навыком продолжается в порядке повторения. Упражнения, часто повторяющиеся вначале, даются дальше всё реже и реже, пока навык не закрепится окончательно.

8) В упражнениях нужно ставить перед учащимися каждый раз одну какую-либо трудность, давать один какой-либо элемент сложного навыка; было бы нецелесообразным ставить ученика перед необходимостью преодолевать одновременно две или несколько трудностей.

Прежде чем давать упражнения в каком-либо сложном навыке, надо дать учащимся возможность усвоить те элементы, из которых он складывается.

9) К каждому последующему навыку надо переходить тогда, когда твёрдо усвоены предыдущие навыки, на которые этот последующий опирается. Степень усвоения должна проверяться путём систематического наблюдения и контроля учителя.

10) Учитель в своей школьной работе ограничен временем. Он работает по плану. Время контролирует учителя, заставляет его быть расчётливым, экономным. Перед учителем постоянно стоит вопрос, как сочетать необходимость достаточно большого количества упражнений с тем обычно ограниченным количеством часов, которое отводится данному навыку. Учитель только тогда сможет удовлетворительно разрешить этот вопрос, если он будет неуклонно следовать принципу: «Беречь время, беречь каждую минуту, не тратить времени на то, что не помогает усвоению навыка».

Зачем, например, при решении задач из задачника тратить время на списывание полного текста условий задачи, когда это условие можно записать кратко, схематично, без ущерба для его усвоения учащимися? Незачем также заставлять учащихся II класса, только ещё овладевающих техникой письма, писать вопросы при решении задачи; можно эти вопросы формулировать устно без всякого ущерба для понимания задачи. Излишне при делении многозначного числа на однозначное (например, 7 283 148 : 6) исписывать целую страницу с произведениями, остатками и неполными делимыми; лучше выполнить это деление устно, записав его в строчку и обозначая только цифры частного по мере их получения.

Одно только устранение излишнего письма может дать большую экономию времени, которое можно использовать для увеличения количества упражнений. Этой же цели служат различного рода таблицы: таблицы для устного счёта; круги с написанными по окружности цифрами (для игры в «молчанку»); экономные формы устного счёта, известные под названием беглого счёта; решение несложных задач в порядке упражнений в устном счёте и другие упражнения.

ПОВТОРЕНИЕ.

Вышеуказанные средства закрепления знаний и навыков должны быть дополнены повторением. Каждый урок арифметики, продвигая учащихся по пути усвоения нового, должен быть использован в той или иной мере и для повторения пройденного. Повторение пройденного должно проходить глав-

ным образом в тесной и органической связи с изучением нового материала.

Необходимость в таком повторении на уроках арифметики встречается тогда, когда: 1) устанавливается связь нового понятия со старыми, известными учащимся; 2) проводится сравнение и сопоставление новых, только что усвоенных понятий с понятиями, ранее изученными; 3) когда пройденное входит в новый материал в качестве его составного элемента. Примеры: для объяснения понятия о проценте необходимо связать это понятие с понятием нахождения части числа; поэтому объяснению процентов должно предшествовать повторение их основы — способа нахождения части числа. После изучения кратного сравнения нужно сопоставить его с ранее пройденным разностным сравнением. При изучении действий с мерами времени полезно сравнить их с действиями над метрическими мерами и т. д.

Независимо от этого можно и нужно повторять пройденное и вне прямой связи с новым материалом, выделяя на повторение специальные уроки.

Повторяя старый материал, нужно давать его в новых связях, в новых сочетаниях; так, повторение сложения нужно включать в сложные примеры, в которых встречаются и другие действия; повторение задачи данного типа полезно проводить на комбинированных задачах, где данный тип является лишь элементом сложной задачи.

Каждое новое повторение полезно проводить с несколько иным содержанием или в иной форме; так, таблица умножения, изученная по постоянному множимому, должна быть повторена и закреплена как таблица, составленная по постоянному множителю.

Повторение должно служить целям углубления уже имеющихся знаний и систематизации их.

ПРИМЕНЕНИЕ НА ПРАКТИКЕ.

Применение на практике является необходимым и во многих случаях заключительным этапом при усвоении арифметических знаний. Работу над усвоением того или иного раздела арифметики можно считать в сущности законченной только тогда, когда ученик проделал ряд упражнений по применению его на практике. Способы этого применения весьма разнообразны, и зависят они от характера знаний и навыков.

Вычислительные навыки находят своё практическое применение в решении задач. Пока ученик упражняется в решении столбиков, пока он усваивает только приёмы и технику вычислений, его внимание сосредоточено исключительно на данном навыке, который является в упражнениях самоцелью, и вся работа носит характер учебных упражнений. Практическое применение находит этот навык при решении задач, где задача

является целью, а вычислительный навык средством. Практика придаёт осмысленность всей предыдущей работе над навыком. Навык в ней ещё и ещё раз проверяется, шлифуется, окончательно закрепляется и автоматизируется. Благодаря практическому применению ученик устанавливает те естественные связи, которые существуют между теорией и практикой, между навыком и жизнью.

Измерительные навыки, получаемые в школе, также могут найти широкое применение в практике измерительных работ, проводимых в школе, дома, на открытой местности. Сначала измерительные навыки вырабатываются в порядке учебно-тренировочных упражнений, где выработка навыка является самоцелью. Потом, когда первая стадия работы по образованию навыка закончена, этот навык находит своё применение в практических работах, где он используется уже как средство; например, в измерении площадей при благоустройстве школьного двора, при разбивке школьного огорода, разбивке грядок под разные культуры или цветочных клумб; в измерении площадей при сельскохозяйственных работах (запашке и уборке урожая).

Уменье решать задачи тоже должно быть использовано на практике. Пока решаются готовые задачи, взятые из задачника, работа носит учебный характер и направлена на овладение теорией решения задач. Но это уменье может быть использовано в практических целях для разрешения жизненных вопросов, связанных с расчётами и выдвигаемых потребностями самого ребёнка или окружающей средой — семьёй, школой, колхозом, тем или иным предприятием. В задачах из сборника содержание и количественные отношения даются готовыми. В задачах же, составляемых учащимися, цифры и количественные отношения устанавливаются ими на основании своего жизненного опыта или по справкам из книг, газет, от людей. Задача вырастает из какого-либо жизненного вопроса, который надо в данный момент разрешить.

Характер вопросов и степень сложности их должны соответствовать классу: для младших классов берутся вопросы попроще, поближе к непосредственным интересам и нуждам ребёнка, для старших классов задания могут быть посложнее, с более широким охватом жизненных вопросов.

Содержанием таких задач может быть: а) подсчёт различного рода материальных и денежных расходов, стоимость школьного завтрака, учебных и письменных принадлежностей, расходов на украшение класса, на дальнюю экскурсию, на посещение театра и кино; на пополнение библиотеки, на ремонт школы и класса, на оборудование пришкольного участка; б) количественный учёт производительности труда: общественно-полезного труда школьников-пионеров, труда взрослых рабочих-стахановцев и передовых колхозников; в) учёт времени, требуемого на выполнение той или иной работы школьником (на приготовление домашних

учебных заданий, на работу по хозяйству, на пришкольном участке и др.), а также взрослым рабочим, колхозником. Такая работа приучает детей к элементарному количественному анализу окружающей действительности, развивает у детей «уменье наблюдать явления сквозь «математические очки» (Н. К. Крупская).

Из всего сказанного в этой главе видно, насколько сложен тот путь, который проходит ребёнок от первоначального знакомства с новым понятием до окончательного овладения им.

Этот путь ведёт ученика к образованию твёрдых навыков через восприятие материала, через полное и глубокое осознание воспринятого, через большой и важный этап упражнений, направленных к закреплению полученных знаний, через заучивание и повторение. На этом пути — пути формирования понятий и развития математического мышления и речи — приводится в действие всё многообразие мыслительных процессов: анализ и синтез, дедукция и индукция, абстрагирование и конкретизация, переходы от единичного к общему и от общего к единичному, а также всё многообразие способов и приёмов обучения. Чтобы управлять этим сложным процессом формирования знаний, учителю нужно хорошо знать этот путь, видеть все основные вехи на нём и понимать значение каждой из них. И при всём этом никогда не нужно упускать из виду учащегося: нужно с большим вниманием следить за тем, как он воспринимает материал, как развивается его мысль, какие затруднения у него встречаются, чем они объясняются и как преодолеваются.

В постоянном внимании к учащемуся — залог эффективности указанных методов.

ГЛАВА ЧЕТВЁРТАЯ.

НАГЛЯДНОСТЬ.

При восприятии и осмысливании арифметического материала большое значение имеет наглядность. Всё обучение арифметике в начальной школе должно быть наглядным, образным, конкретным. К развитию отвлечённого, абстрактного мышления, к образованию общих математических понятий надо идти, отправляясь от наглядного обучения. Большое значение наглядности обусловлено тем, что ребёнок мыслит образно, конкретно. Он хорошо понимает то, что наглядно, конкретно, и, наоборот, для него неясны и непонятны отвлечённые суждения. Он может усвоить, запомнить эти суждения, но, если они не подкреплены наглядностью, они будут для него пустыми, бессодержательными фразами.

Наглядность нужна для образования у детей первых числовых понятий, и для расширения круга числовых представлений, и для развития их математического мышления.

Первые числовые понятия у ребёнка возникают ещё до школы на основе многократного восприятия групп предметов и их счёта. В дальнейшем, когда ребёнок приходит в школу, при образовании каждого общего понятия, носящего более или менее отвлечённый характер, он обязательно проводится через этап наглядного обучения.

Как, например, ученик приходит к выводу, что $4 + 2 = 6$? Сначала ему дают конкретные предметы, которые он видит, осязает, пересчитывает, передвигает, и притом разные предметы; так, к четырём кубикам он прибавляет два кубика, к четырём палочкам прибавляет две палочки, к четырём кружочкам — два кружочка, к четырём спичкам — две спички. Во всех этих случаях он получает 6: шесть кубиков, шесть палочек, шесть кружков, шесть спичек.

Дальше, на следующем этапе, который близко примыкает к первому, а иногда и сливается с ним, ученик проводит эту операцию сложения мысленно по представлению, не имея перед глазами предметов.

При решении задач: «В коробке лежало 4 карандаша; туда положили ещё 2 карандаша. Сколько карандашей стало в коробке?» «В клетке было 4 кролика; туда посадили ещё 2 кроликов. Сколько кроликов стало в клетке?», ученик в случае сомнения проверяет результат сложения на предметах, условно заменяющих карандаши, кроликов,— на палочках, на рисунках и т. д.

В ходе такой работы ученик постепенно освобождается от материальной основы счёта — от кубиков, палочек, спичек, кружочков, выделяет то, что было общим для всех случаев сложения, и приходит к выводу, что всегда, во всех случаях, 4 да 2 будет 6, что и запоминает наизусть: $4+2=6$. Тот же процесс происходит и при развитии каждого понятия, каждого арифметического действия.

Различные разделы курса арифметики требуют применения наглядных пособий различного рода; например, когда изучаются числа первого и второго десятков, тут в качестве наглядных пособий выступают естественные предметы счёта: палочки, кубики, спички, кружочки и т. д. Когда далее дети переходят к изучению нумерации в пределе сотни и тысячи, наглядными пособиями являются пучки палочек, пучки соломинок или бумажные ленты, разделённые на метры, дециметры и сантиметры. Когда же область чисел расширяется ещё больше и учащиеся переходят к изучению нумерации чисел любой величины, возникает потребность в наглядных пособиях с условным изображением числа на счётах или в клетках абака. В дальнейшем приходится ограничиваться уже цифровыми образами. Итак, при расширении числовой области меняются и наглядные пособия: естественные предметы и группы предметов переходят в условные образы, а эти последние в конце концов уступают своё место цифрам.

Самым убедительным для учащегося на первых порах обучения является процесс счёта или вычислений на натуральных предметах, затем следуют картинки или рисунки с изображением предметов. В дальнейшем, по мере развития мышления и вообра-

жения учащихся, наряду с предметами и их изображениями, наглядность в процесс обучения могут вносить условные схемы, таблицы, чертежи.

Пользование пособиями последнего рода требует от учащихся известной умственной зрелости и достаточно развитого воображения, поэтому вводить их следует с некоторой осторожностью и своевременно, не форсируя этого введения.

Наглядность помогает не только восприятию и пониманию математических фактов, но и осознанию тех мыслительных процессов, которые сопровождают объяснение материала. Эти процессы тоже надо подкреплять и связывать с известными образами, тогда они лучше уяснятся и легче воспроизводятся учащимися.

Приведём пример. Допустим, что учитель в III классе поставил целью урока разобрать задачу аналитическим методом и на этом разборе выяснить учащимся сущность этого метода.

Задача: «Один насос работал 4 часа, давая по 138 вёдер воды в час, а другой 3 часа, давая по 168 вёдер в час. Который из них накачал больше воды и на сколько больше?»

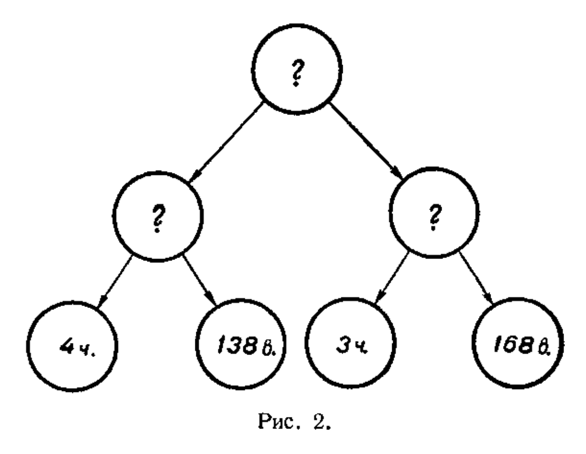


Рис. 2.

Учитель поступит правильно, если он свяжет разбор задачи со следующей схемой (рис. 2). Эта схема будет служить тем конкретным образом, который запечатлеется в памяти учащегося и будет помогать ученику воспроизводить логический процесс — процесс анализа задачи.

Высоко оценивая наглядность и широко применяя её, надо в то же время помнить, что наглядность есть не самоцель, а только вспомогательное средство для достижения подлинной цели — твёрдого усвоения арифметических знаний и развития у детей логического (отвлечённого, абстрактного) мышления. Поэтому наглядность надо применять тогда, когда она необходима, и от наглядности надо отходить, как только ученики хорошо поймут объясняемое. Неумеренное, излишнее применение наглядности может затормозить развитие у учащихся отвлечённого, абстрактного мышления, может задержать их на ступени конкретного мышления, которую надо преодолеть. Конечная задача школы — научить ученика производить вычисления без наглядных пособий, научить решать задачи на основе только рассуждения. Поэтому наглядные пособия нужно широко применять на этапах восприятия и осмысливания материала, а также на этапе первоначальных упражнений, но упражнения по закреплению знаний надо

вести без наглядных пособий, обращаясь к ним только в случае затруднений и непонимания, обнаруживаемого отдельными учащимися.

В зависимости от цели и способа применения наглядные пособия можно разделить на две группы — демонстрационные и лабораторные.

К демонстрационным относятся такие пособия, которыми пользуется учитель для показа всему классу, например: классные счёты, арифметический ящик, таблицы, плакаты и др. На них учитель разъясняет учащимся вычислительные приёмы, правила выполнения действий, способы решения задач. Учитель показывает, а ученики смотрят, наблюдают, сравнивают, сопоставляют, а затем на основе сделанных наблюдений приходят к выводам и обобщениям.

Лабораторные пособия принято называть дидактическим материалом. Это те пособия, которые имеются на руках у учащихся и которыми пользуются ученики для непосредственной и самостоятельной работы с ними по заданию учителя. Сюда относятся различные предметы счёта (палочки, кубики, спички, кружочки, модели монет и др.), разрезные цифры, модели геометрических тел и др. Работа с дидактическим материалом обеспечивает наивысшую степень активности детей на уроке, поэтому широкое внедрение дидактического материала крайне необходимо.

В зависимости от способа изготовления различают наглядные пособия готовые и самодельные.

ГОТОВЫЕ НАГЛЯДНЫЕ ПОСОБИЯ.

К числу готовых пособий относятся такие, которые изготовляются на фабриках или в мастерских наглядных пособий по установленным стандартным образцам и рассылаются по школам, например: классные счёты, арифметический ящик, таблица умножения, модели мер. Это классические пособия, разработанные великими мастерами педагогического дела (а иногда и народного творчества) и проверенные на опыте многих школ в течение многих веков. Они составляют тот сравнительно небольшой минимум пособий, без которых не может обойтись ни одна школа без ущерба для качества преподавания. Остановимся на каждом пособии этого минимума, ограничиваясь пока только описанием его устройства и краткими указаниями на его значение (приёмы их применения будут подробно освещены в специальных главах этой методики).

К л а с с н ы е с ч ё т ы. Классные счёты являются одним из самых ценных и необходимых наглядных пособий по арифметике. Это наиболее универсальное пособие: пользуясь им, можно выяснить большинство основных арифметических вопросов, содержащихся в программе начальной школы. Достоинством этого пособия является то, что его можно переносить и ставить в наилучшее

положение по отношению к классу. Оно хорошо видно, легко обозримо для учащихся. Шарики, которые являются главным средством счёта, подвижны и легко перемещаются. Классные счёты необходимо применять, начиная с I класса; только здесь достаточно оставить всего две проволоки с 20 шариками. В I и II классах не следует знакомить учащихся с поместным значением шариков: каждый шарик рассматривается здесь как простая единица, следовательно, вся совокупность шариков на счётах для ученика I и II классов — поле однородных единиц.

Классные счёты применяются при изучении следующих вопросов:

а) В I классе — счёт в пределе 10, присчитывание и отсчитывание по единице, сложение и вычитание в пределе 10, счёт, нумерация и все действия в пределе 20. На счётах удобно выяснить понятие «на столько-то больше, на столько-то меньше». Таким образом, большая часть курса арифметики в I классе может быть объяснена на классных счётах.

б) Во II классе классные счёты могут быть применены для изучения таблицы умножения (для набора равных слагаемых), разностного сравнения чисел, кратного сравнения, увеличения и уменьшения числа в несколько раз.

в) В III и IV классах классные счёты являются незаменимым пособием для объяснения нумерации многозначных чисел. Но здесь классные счёты выступают в роли не только наглядного пособия, но и счётного прибора. Учащиеся приобретают уменье производить на счётах сложение и вычитание многозначных чисел, сначала отвлечённых, а затем и составных именованных.

Арифметический ящик. Арифметический ящик принадлежит к числу наиболее распространённых наглядных пособий. Он весьма давнего происхождения и пользуется большой популярностью в школах различных стран и народов. Конструкция этого пособия общеизвестна, поэтому на описании её останавливаться не будем. Счётный материал в нём представлен, как известно, кубиками, брусками, досками. Кубики означают простые единицы, бруски — десятки, доски — сотни. Применяется он при изучении арифметики в I и II классах, при изучении геометрического материала — в III и IV классах.

Главное назначение этого пособия — конкретизировать вычислительные приёмы, счёт и нумерацию чисел в пределе 10, 20, 100 и 1 000. Пользуясь им, удобно показать и объяснить: прямой и обратный счёт до десяти, приёмы сложения и вычитания в пределе 10, нумерацию и все действия в пределе 20, все действия с круглыми десятками, нумерацию и все действия в пределе 100, нумерацию и все действия в пределе 1 000. Особенно удобен арифметический ящик для объяснения нумерации в пределе 20 и объяснения приёмов вычисления в пределе 100. Вычисления в пределе 1 000 также поддаются конкретизации, но процесс показа при этом является малоудобным, громоздким.

К достоинству арифметического ящика относится то, что в нём очень наглядно представлено взаимное соотношение между основными разрядными единицами — простыми единицами, десятками и сотнями — без всяких условностей, как это имеет место на классных счётах. Каждый брусок-десяток представляет собой нечто целое и вместе с тем состоящее из отдельных кубиков-единиц. Ясно видно, что доска состоит из десяти брусков-десятков и сотни кубиков-единиц. Поэтому арифметический ящик особенно

ценен для объяснения нумерации двузначных и трёхзначных чисел.

Существенным недостатком арифметического ящика является то, что кубики можно демонстрировать только на горизонтальной плоскости, а это затрудняет видимость производимых операций, особенно для учащихся, сидящих на задних партах. В этом отношении ящик уступает классным счётам, где все операции происходят в вертикальной плоскости и хорошо видны для всех учащихся. В последние годы были предприняты попытки к тому, чтобы устранить этот недостаток, однако результаты этих попыток нельзя признать удачными.

Палочки и пучки палочек. Это простое и дешёвое наглядное пособие представляет собой тонкие палочки одинаковой длины (около 1 дециметра), связываемые в пучки различной величины. Отдельные палочки служат для счёта единицами. Каждые 10 палочек связываются в один пучок, представляющий десяток. 10 таких пучков-десятков связываются снова в один большой пучок — сотню. Таким же образом может быть составлен пучок-тысяча.

Набор пучков и палочек очень хорош для счёта и выяснения состава разрядных единиц: каждый пучок представляет собой самостоятельное целое, которым при счёте десятками пользуются так же, как отдельными палочками при счёте до 10; в то же время каждому ученику ясно, что это целое состоит из 10 палочек, т. е. что десяток, являясь счётной единицей, сам состоит из 10 единиц. При помощи набора палочек и пучков хорошо выясняется десятичный состав чисел и производство действий над ними, причём, благодаря связыванию и развязыванию пучков, очень наглядно демонстрируется превращение единиц низшего разряда в единицы высшего разряда (при сложении и умножении) и раздробление единиц высшего разряда в единицы низшего разряда (при вычитании и делении).

Модели метрических мер. При обучении начальной арифметике необходимы модели, наглядно знакомящие учеников с мерами. В числе таких моделей в школе должны быть: метр деревянный с подразделением на дециметры, сантиметры и миллиметры, литровая и полулитровая кружка; весы с разновесом, в который входят гири в 1, 5, 10, 50 и 100 граммов. Из квадратных мер нужно иметь квадратный сантиметр, квадратный дециметр и квадратный метр; из кубических мер — кубический сантиметр, кубический дециметр и кубический метр. Модели эти используются во всех классах.

Ученики должны не только видеть эти модели, но и пользоваться ими для измерения длины, веса, площади, ёмкости. Непосредственное пользование мерами способствует выработке точного представления о мерах и навыков измерения.

Модели геометрических фигур и тел. В IV классе изучение «геометрического материала» (квадратных и кубических мер) обеспечивается главным образом самодельными наглядными пособиями. Для изучения геометрических тел применяется деревянная или из папки модель куба и модель прямо-

угольного параллелепипеда (из арифметического ящика). По этим моделям и проводится описание куба и прямоугольного параллелепипеда на уроке.

Для проведения измерительных работ на местности применяются: а) вехи, б) колышки, в) флажки, г) мерная верёвка или цепь в 10 *м*, д) эккер (простейший, в виде крестовины на заострённой палке).

Таблицы. В качестве наглядных пособий по арифметике применяются также и таблицы. По своему значению таблицы уступают вещественным наглядным пособиям; предметы, изображённые на них, статичны, неподвижны, неразложимы на части, на элементы, как это имеет место в арифметическом ящике или на классных счётах. Тем не менее и они помогают сделать обучение арифметике наглядным, образным, конкретным; они дают учащимся яркие зрительные образы — в этом их главное значение. Из таблиц широкое распространение в школах получили следующие:

1. **Числовые таблицы** (10 штук), разработанные В. Л. Эменовым, служат хорошим наглядным пособием в I классе при изучении чисел. Количество таблиц (10) соответствует количеству изучаемых чисел от 1 до 10. Каждое число имеет свою таблицу. Каждая таблица построена по одному и тому же плану: а) изображение предметов как наглядного образа данного числа; б) изображение числа при помощи числовых фигур, представленных в различных комбинациях, и, наконец, в) изображение числа при помощи цифры печатной и письменной. От конкретного к отвлечённому, от естественного к условному — таков путь, по которому ведёт ученика таблица при изучении каждого числа.

2. **Три таблицы метрических мер** — линейных, квадратных и кубических — дают наглядное представление о величине каждой меры, об их единичных отношениях и о способах их применения при измерении. Первая таблица используется во всех классах, начиная с первого; вторая (квадратные меры) и третья (кубические меры) — в IV классе. Эти таблицы на время работы с ними вывешиваются в классе для обозрения их учащимися; зрительные образы мер и способов применения их запечатлеваются в памяти учащихся.

3. **Таблица умножения** — широко распространённое и всем известное учебное пособие. Применяется в I и II классах, где эта таблица изучается. Значение таблицы заключается в том, что она даёт хороший зрительный образ результатов, получаемых при перемножении однозначных чисел ($5 \times 6 = 30$), которые должны быть усвоены учащимися. Таблицы особенно помогают тем учащимся, которые обладают хорошей зрительной памятью. Таблица должна висеть на классной стене и убирается только на время тех контрольных работ, в которых проверяется знание учащимися таблицы умножения наизусть, что бывает во II классе.

4. **Таблицы для устного счёта**, разработанные К. Шапош-

никовым, применяются, как показывает самое название, для упражнений в устном счёте. Таблицы вывешиваются только на тех уроках, на которых производится тренировка в устном счёте. Применяются во II, III и IV классах. Значение их заключается в том, что они дают много материала для упражнений и избавляют учителя от необходимости подбирать и писать этот материал на доске. Особенно полезны таблицы для двухкомплектных школ, где они с большим удобством могут быть использованы в заданиях для самостоятельной работы учащихся.

Недостатком этих таблиц является то, что они плохо видны на большом расстоянии; поэтому надо, чтобы каждый ученик имел у себя эти таблицы переписанными на листочках.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
А	4	17	25	32	49	56	68	75	83	96
Б	1	15	28	36	43	57	64	72	85	99
В	7	12	21	35	50	60	65	79	83	93
Г	10	18	30	34	45	55	66	80	82	100
Д	6	14	26	39	42	58	61	74	86	94
Е	9	16	23	31	47	53	69	77	84	91
Ж	3	11	29	37	44	56	63	71	89	97
З	5	20	24	33	46	54	67	76	90	95
И	8	13	27	40	48	52	70	73	87	92
К	2	19	22	38	41	59	62	78	81	98

Пособие для изучения дробей. Пособие представляет собой набор кругов и частей круга из фанеры или из папки. В набор входят 2 целых круга и круги, составленные из половин, четвертей, восьмых, третей, шестых, пятых и десятых долей. Различные доли окрашены в различные цвета. Прибор служит для пояснения всех операций с дробями.

Самодельные пособия.

Как бы ни были совершенны готовые наглядные пособия, как бы хорошо ни была обеспечена ими школа, всё же в преподавании арифметики нельзя обойтись без самодельных пособий, изготовляемых самим учителем.

Преподавание арифметики — живое, творческое дело, в котором методы и приёмы преподавания постоянно обновляются и совершенствуются. Передовое учительство, работая творчески, улучшает методы и приёмы своей работы, улучшает, варьирует, обновляет и наглядные пособия. Изобретения отдельных учителей, описываемые в журналах, демонстрируемые на выставках, пропагандируемые в докладах при обмене опытом, должны подхватываться учительской массой и внедряться в практику массовой школы. Готовясь к уроку и продумывая вопрос о том, как сделать объяснение нового материала более понятным и наглядным, учитель должен готовить и соответствующие наглядные пособия. Эти пособия он может взять или из числа готовых, присланных в школу, или сам должен сконструировать, прибегая, если возможно, к опыту других школ.

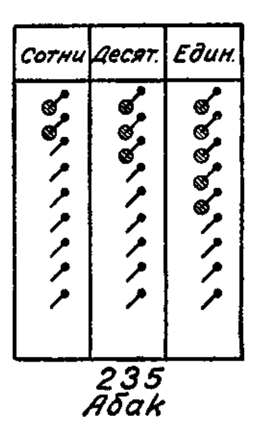


Рис. 3.

Все самодельные пособия делятся на две группы: а) пособия для демонстрации, для показа всему классу и б) дидактический материал, который раздаётся на руки учащимся для лабораторной работы с ним.

Из демонстрационных пособий учителю приходится чаще всего изготовлять следующие:

Палочки и пучки палочек (в случае необходимости палочки могут быть заменены прутиками). В мастерских наглядных пособий палочки не всегда готовятся в достаточном количестве, поэтому школе приходится самой готовить это полезное наглядное пособие.

Абак (деревянный), используемый при изучении нумерации в пределе 1 000. Это пособие ценно в том отношении, что на нём разряды изображаются в том же порядке, что и при письменной нумерации. По своей конструкции абак представляет доску, разделённую на три полосы, соответствующие единицам, десяткам и сотням; в каждой полосе имеется по девяти гвоздей. К абаку приготовляются кружочки из фанеры или картона, которые надеваются на гвозди и изображают единицы соответствующих разрядов (рис. 3).

Числовые фигуры для изучения чисел первого десятка (см. рис. 29). На этих фигурах хорошо виден состав каждого

числа. Учитель изготовляет каждую новую фигуру по мере перехода к изучению нового числа.

Числовые фигуры для сложения в пределе 20. Способ изготовления этого пособия виден из следующего примера.

Положим, что изучается прибавление к 9. Здесь возможны следующие 8 случаев:

9 + 2 = 11	9 + 5 = 14	9 + 8 = 17
9 + 3 = 12	9 + 6 = 15	9 + 9 = 18
9 + 4 = 13	9 + 7 = 16	

Чтобы объяснить прибавление к 9 двух и к 9 трёх единиц, изготовляются на картоне следующие фигуры (рис. 4).



Рис. 4.

Приём прибавления один и тот же: сначала первое слагаемое дополняется до 10, а затем к 10 прибавляется остальная часть второго слагаемого.

Таблица Пифагора составляется постепенно по мере изучения таблицы умножения. Таблица висит в классе, пока не будет заполнена и пока дети продолжают усваивать таблицу умножения наизусть.

Каждый учащийся должен иметь у себя в тетради эту таблицу и постепенно заполнять её по мере продвижения в изучении таблицы умножения в классе.

Таблица Пифагора.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Рис. 5.

Таблица умножения на наборе прямоугольников, разделённых на клетки (рис. 7).

Плакаты для решения задач, где изображены предметы с указанием цен. Один и тот же плакат может быть использован для решения сначала простых, а потом и сложных задач. Плакат изготовляется на белой или цветной бумаге. Ри-

сунки раскрашиваются. Цифры для обозначения цен можно вырезать из старого отрывного календаря. Плакат вывешивается на уроке, и по нему сначала сам учитель составляет задачи, а затем постепенно приучаются к составлению задач и ученики.

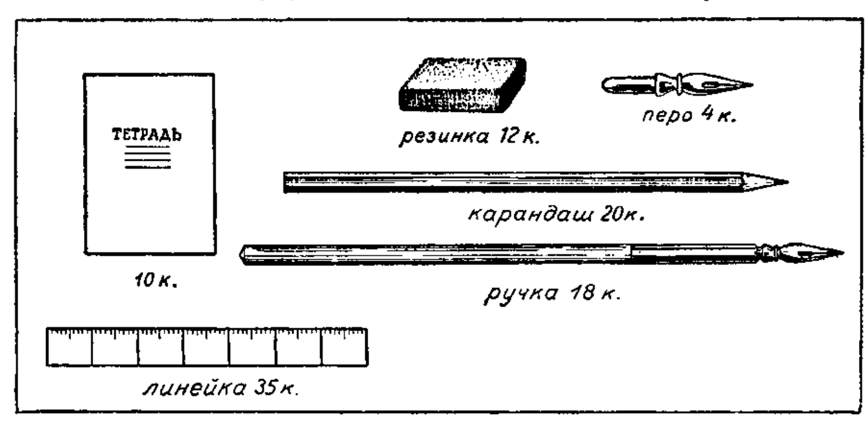


Рис. 6.

Плакат сберегает много времени, так как при нём не нужно записывать условие задачи и повторять его для запоминания чисел. Изображения покупаемых предметов делают задачи понятными и интересными для детей (рис. 6).

По этому плакату могут быть составлены примерно следующие задачи: «Ваня купил тетрадь и ручку. Сколько денег он израсходовал?» «У девочки было 25 коп. Она купила два пера и резинку. Сколько денег у неё осталось?» «Ученик купил 5 тетрадей. Сколько он должен уплатить в кассу?» и т. д. Отсюда видно, что плакат даёт материал для составления задач простых и сложных на различные действия.

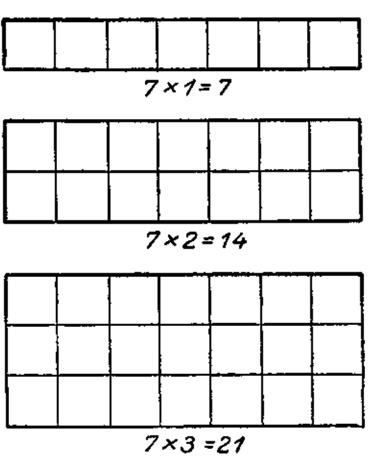


Рис. 7.

Н а б о р к в а д р а т о в и п р я м о у г о л ь н и к о в из картона или фанеры различных размеров (размеры выражены в целых дециметрах или сантиметрах). Пособие служит для изучения формы этих фигур и для упражнения в вычислении площадей. Нужно иметь несколько квадратов и несколько прямоугольников определённых размеров. Каждая фигура имеет свой номер, которому соответствует определённый размер. Это облегчает проверку работы учащихся: учителю достаточно спросить номер фигуры, чтобы знать, верно ли ученик нашёл результат.

Образцы квадратных и кубических мер. Квадратный сантиметр, квадратный дециметр и квадратный метр выполняются на бумаге или картоне в натуральную величину и вывешиваются в классе. Квадратный метр разбивается на квадратные дециметры, квадратный дециметр разбивается на квадратные сантиметры. Образцы кубических мер делаются из картона или из дерева. Кубический метр сколачивается из 12 брусков и обшивается картоном или фанерой.

Математические игры. Арифметическое лото состоит из карточек лото, карточек с примерами и покрышек. Можно сделать различные варианты лото, в зависимости от класса и от того, что пройдено к моменту игры в лото. Для игры на сложение и вычитание в пределе 10 лото будет иметь примерно следующую форму и содержание.

2	4	5	7	10

1	4	6	8	9

Карточки лото.

10 — 8 = 2	8 — 7 = 1
5 + 4 = 9	4 + 4 = 8
5 + 2 = 7	6 — 3 = 3

Карточка с примерами.

Карточек лото заготовляется столько, сколько учеников в классе. Карточка на сложение и вычитание в пределе 10 имеет только один ряд цифр. Примеры пишутся на особых карточках.

На сложение и вычитание в пределе 20 лото может иметь следующее содержание.

2	5	8	13	16
3	6	11	15	20

Карточка лото.

20 — 12 = 8	19 — 15 = 4
6 + 7 = 13	20 — 4 = 16
18 + 2 = 20	7 + 7 = 14
12 — 6 = 6	14 — 9 = 5

Карточка с примерами.

Лото на табличное и внетабличное умножение и деление для II класса.

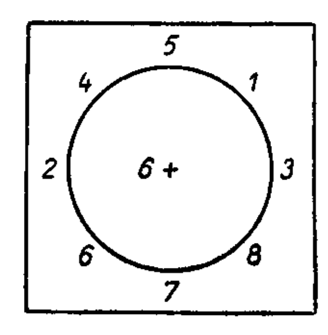
5	21	36	50	72
6	25	42	54	81
8	28	48	63	36

Карточка лото.

6 × 6 = 36	84 : 4 = 21
25 × 4 = 100	17 × 2 = 34
56 : 2 = 28	8 × 9 = 72
25 × 2 = 50	9 × 9 = 81
64 : 8 = 8	40 : 8 = 5

Карточка с примерами.

Круги для игры в «молчанку» (для упражнений в устном счёте) могут быть составлены на разные разделы программы: на сложение и вычитание в пределе 10, 20, 100, 1 000, на умножение и деление в тех же пределах. Техника изготовления кругов очень простая: вычерчивается круг достаточно большого размера (радиус 20—30 *см*), в центре круга и по окружности пишутся числа, над которыми производят действия (рис. 8).



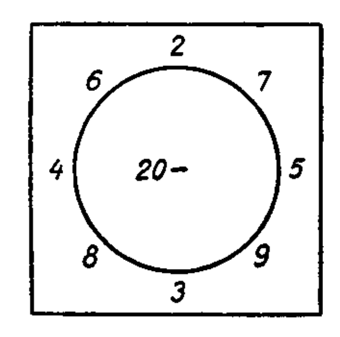


Рис. 8.

Приведённых примеров достаточно, чтобы видеть, как широк и разнообразен круг пособий, изготовляемых самим учителем. Почти нет ни одного такого вопроса, который нельзя было бы иллюстрировать тем или иным самодельным наглядным пособием. При наличии творческой инициативы и интереса к делу учитель всегда найдёт ту форму наглядности, которая наилучшим образом вскроет сущность изучаемого понятия и доведёт её до сознания учащегося.

Дидактический материал.

Одной наглядности для успешного усвоения арифметики мало, к ней надо присоединить ещё активную деятельность самого ученика и в процессе восприятия, и при выяснении смыслового содержания воспринятого, и в процессе упражнений. При показе наглядных пособий ученик получает известные зрительные образы, которые многое уясняют ему, привлекают его внимание к предмету изучения. Но ученик при этом остаётся только зрителем; его роль сводится к созерцанию того, что показывает учитель. Активность ученика достигает высшего предела тогда, когда он сам что-либо делает, когда в работе участвует не только его голова, но и руки, когда происходит всестороннее (не только зрительное) восприятие материала, когда он имеет дело с предметами, которые он может по своему усмотрению перемещать, по-разному комбинировать, ставить их в определённые соотношения, наблюдать эти количественные отношения и делать из наблюдений выводы. Всё это возможно при том условии, если учитель будет не только демонстрировать наглядные пособия у классного стола,

но вооружит ими каждого учащегося и заставит его в течение урока работать с ними. Наглядные пособия, находящиеся в руках ученика и имеющие значение рабочего материала, получили название дидактического материала. Следовательно, наглядные пособия должны быть дополнены изготовлением в школе дидактического материала для снабжения им учащихся. Особенно большое значение имеет дидактический материал в I классе. При этом надо иметь в виду, что ученики сами принимают очень большое участие в снабжении себя дидактическим материалом. Учитель во многих случаях должен только организовать учеников для сбора или изготовления нужного материала.

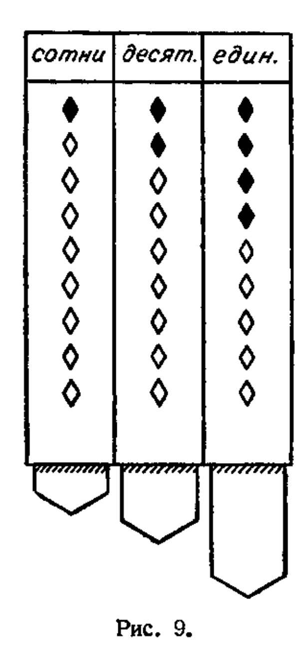


Рис. 9.

Дадим здесь краткий примерный перечень тех предметов, которые составляют содержание дидактического материала по арифметике, распределив их по классам.

I класс. Для усвоения счёта и арифметических действий в пределах 10, 20 и 100 ученику I класса нужно иметь в качестве предметов счёта палочки (прутики, спички), связанные в пучки; набор кружочков, прямоугольников и квадратов, сделанных из картона, разрезные цифры; модели монет из картона или толстой бумаги ценностью в 1, 2, 3, 5, 10 копеек (используются монеты для изучения состава чисел). Способ изготовления монет: подкладывается под чистый кусок бумаги монета, затем бумага затушёвывается карандашом и вырезается.

Весь этот набор пособий должен храниться у ученика в особом ящичке или в пакете, откуда по мере надобности ученик вынимает их, чтобы производить с ними счётные операции по указанию учителя.

II класс. Ручной индивидуальный абак для изучения нумерации в пределе 1 000. Изготовляется абак из картона размером 20 *см*×8 *см*; сверху на него наклеиваются 3 полоски белой бумаги с 9 отверстиями, причём эти полоски наклеиваются только краями, чтобы оставалось пространство для свободного передвижения бумажных полосок (ленточек), открывающих по мере выдвижения единицы любого разряда (рис. 9). Весь класс получает задание изобразить данное число. Учащиеся передвигают ленточки и получают заданное число.

III класс. Индивидуальный абак делается по тому же образцу, что и во II классе; только здесь вместо трёх полосок делается девять или даже двенадцать — по числу разрядов. Используется абак при изучении устной и письменной нумерации.

IV класс. Набор квадратов и прямоугольников из картона служит для изучения свойств квадрата и прямоугольника при прохождении темы «Геометрический материал».

Набор кубиков и брусков, сделанных из дерева или пластелина, для изучения свойств куба и параллелепипеда и для измерения объёмов.

Круги, прямоугольники, квадраты, разделённые на 2, 4, 8 частей. Применяются для конкретизации понятия о долях единицы $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$. Для этого они сгибаются пополам, половины — ещё пополам, четверти — ещё пополам; получаются доли: половина, четверть, восьмушка.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ.

Чтобы успешно вести преподавание арифметики и давать учащимся твёрдые знания по этому предмету, недостаточно только знать арифметику и методы её преподавания, надо ещё уметь хорошо организовать процесс обучения. Результаты преподавания в значительной мере зависят от организации работы. Бывают случаи, когда учитель имеет достаточную общеобразовательную (математическую) подготовку, и тем не менее его учащиеся не обладают по арифметике хорошими знаниями. Анализ работы таких учителей показывает, что причиной недостаточных знаний в таких случаях являются дефекты в организации преподавания: отсутствие плановости и системы в работе, неуменье работать со всем классом (не упуская в то же время из виду каждого отдельного ученика), нечёткость в заданиях и нетребовательность к выполнению их учащимися, плохая постановка проверки знаний учащихся и, как следствие всего этого, плохая дисциплина в классе. Общие требования к хорошей организации труда должны найти применение и в преподавании арифметики: разработать чёткий план, хорошо подготовиться к уроку, во́-время начать и во́-время кончить работу, иметь всё необходимое под руками, давать чёткие и определённые задания, проверять их выполнение — таков должен быть стиль работы советского учителя.

ПЛАНИРОВАНИЕ.

Обучение начальной арифметике преследует различные цели и имеет сложное содержание. В него входят устный счёт и письменные вычисления, решение задач и элементы теории, связанной с арифметическими действиями, развитие пространственных представлений. Преподавание арифметики, с одной стороны, должно содействовать развитию у детей логического мышления,

а с другой стороны, оно должно вооружить их практическими навыками и уменьями. При такой сложности целей и содержания преподавание арифметики может быть успешным только при наличии плана в работе, в котором разные цели и задачи могут найти своё гармоническое сочетание с строгим учётом фактора времени. Плановость в работе обеспечит систему и последовательность изложения, которые необходимы для твёрдого усвоения знаний учащимися.

В процессе обучения арифметике необходимы планы:

1) годовой, он же и четвертной, с названиями основных разделов программы и с распределением их по четвертям учебного года;

2) план изучения темы, или тематический план;

3) план очередного урока.

В четвертом плане содержатся названия основных разделов (тем), которые должны быть пройдены на протяжении четверти, с указанием количества уроков и календарных сроков прохождения каждого раздела. Четвертной план может быть составлен по следующей схеме:

№ п/п.	Название тем	Количество уроков	Календарные сроки	Отметка о выполнении
	1-я четверть — 56 уроков			
1	Повторение пройденного во 2 классе:			
	а) повторение первой сотни . . .	5	1/IX— 6/IX	
	б) повторение нумерации и действий с круглыми десятками в пределе 1000	3	7/IX— 9/IX	
2	Внетабличное деление с остатком в пределе 100	5	10/IX—15/IX	
3	Контрольная письменная работа с последующим её анализом	2	16/IX—17/IX	
4	Письменное сложение в пределе 1000 и т. д.	4	18/IX—22/IX	

Несмотря на простое содержание четвертного плана, значение его велико: он регулирует распределение времени, предупреждает как отставание, так и поспешное забегание вперёд.

Дальнейшим развитием четвертного плана, его конкретизацией, являются тематические планы. В этих планах тема разбивается на отдельные вопросы таким образом, чтобы содержание каждой части могло уложиться в один-два урока. Содержание каждого урока должно представлять собой логически целое, более или менее законченное.

Чтобы хорошо построить тематический план, нужно учесть:

а) объём материала, составляющего содержание данной темы, и б) количество уроков, которое может быть отведено на данную тему.

Перед составлением тематического плана нужно предварительно ознакомиться с материалом темы по задачнику и с методами изучения этой темы по «Методике».

В тематическом плане развёртывается не только содержание данной темы, но и указывается материал из пройденного, подлежащий повторению. Указываются также контрольные работы, когда и по каким разделам они будут проведены. Отмечаются даты прохождения темы — начало работы, её конец, дата заключительной контрольной работы.

Техника оформления тематического плана проста: слева, в широкой графе, пишется содержание вопроса или раздела, справа, в узкой графе, указывается количество уроков, отводимых на данный вопрос (обычно один-два или три урока). Например, план темы III класса «Нумерация многозначных чисел» может быть составлен так:

Тема: «Нумерация многозначных чисел». 11 уроков. Начало 10/XI, конец 22/XI. Контрольная работа 23/XI. Наглядные пособия: классные счёты, абак, нумерационная таблица.

1. Знакомство со счётными единицами: простыми единицами, десятком, сотней, тысячей... до сотни миллионов включительно. Составление таблицы счётных единиц. Откладывание их на счётах	1 урок.
2. Знакомство с разрядами; место каждой разрядной единицы на классных счётах и в нумерационной таблице. Составление и разложение данных чисел на разрядные числа	1 урок.
3. Знакомство с классами (при помощи абака и нумерационной таблицы). Чтение и обозначение чисел в нумерационной таблице	1 урок.
4. Упражнения в чтении и записи чисел	3 урока.
5. Письменное разложение чисел на разрядные слагаемые. Составление чисел по данным разрядным слагаемым. Счёт: присчитывание и отсчитывание по единице и группами единиц и запись получаемых чисел	1 урок.
6. Преобразование состава чисел: раздробление высших разрядов в низшие. Упражнения в чтении и записи чисел	1 урок.
7. Преобразование состава чисел: превращение низших разрядов в высшие и выделение из данного числа всех единиц данного разряда	1 урок.
8. Повторение всего пройденного о нумерации	1 урок.
9. Контрольная письменная работа для проверки знания нумерации	1 урок.

Этот план составлен поурочно (за исключением 4-го вопроса). Но в некоторых случаях можно указывать материал суммарно на несколько уроков.

Значение хорошо составленного тематического плана состоит в том, что он регулирует распределение материала по урокам и целесообразное использование каждого часа.

На основе тематического плана составляется развёрнутый, конкретный план на каждый урок. Этот план должен быть наиболее

конкретным, ибо он служит руководством к действию. План урока необходимо иметь каждому учителю, независимо от его квалификации и стажа; опытный учитель может ограничиться кратким, схематичным планом, а малоопытный, начинающий учитель нуждается в более подробном и конкретном плане; но для того и другого план необходим, так как без плана хороший урок дать нельзя. О составлении такого плана подробно сказано дальше, в связи с рассмотрением урока арифметики.

УРОК АРИФМЕТИКИ.

В зависимости от цели и содержания, уроки арифметики могут быть четырёх типов:

а) уроки, на которых *объясняется* новый материал;

б) уроки, на которых путём упражнений *закрепляются* навыки — в письменных вычислениях, в решении задач, в устном счёте;

в) уроки, на которых *повторяется* пройденное;

г) уроки, на которых знания учащихся *проверяются* посредством письменных контрольных работ.

Такое разделение носит, однако, условный характер, так как на каждом уроке (за исключением письменных контрольных работ) должны иметь место и расширение знаний, и упражнения, и проверка, и повторение. Но на одних уроках главной целью является выяснение нового понятия, на других — упражнение, на третьих — повторение, на четвёртых — проверка знаний учащихся. В зависимости от этой главной цели каждый урок может быть отнесён к тому или иному типу.

Уроки первого типа — *объяснение нового материала* — являются наиболее сложными. От качества этих уроков зависит чёткость восприятия, глубина и ясность понимания изучаемого материала. Уроки этого типа имеют, примерно, такую структуру:

1. Проверка домашнего задания.
2. Сообщение *цели* урока и подготовка учащихся к восприятию нового материала.
3. Объяснение нового материала.
4. Воспроизведение учащимися объяснения учителя на решении примеров или задач.
5. Обобщения и выводы.
6. Задание на дом.

Объяснение нового материала на этих уроках составляет главную часть урока; этой части уделяется и больше внимания и больше времени.

Уроки второго типа — уроки-*упражнения* — по своей структуре и содержанию несколько проще, чем уроки первого типа. Главное здесь заключается в умелом подборе примеров и задач, в том, чтобы эти примеры были разнообразны и исчерпы-

вали все случаи каждого действия, все разновидности задач на данное правило. Кроме того, в задачу этих уроков входит — научить учащихся работать самостоятельно, поэтому, готовясь к таким урокам, учитель тщательно продумывает вопрос о соотношении между работой под его непосредственным руководством, полусамостоятельной и самостоятельной работой детей.

Уроки этого типа строятся примерно по следующей схеме:

1. Проверка домашнего задания. 2. Устный счёт. 3. Упражнения (решение примеров или решение задач): а) под руководством учителя, б) полусамостоятельно, в) самостоятельно. 4. Задание на дом.

Уроки повторения проводятся обычно по окончании пройденной темы, а также в конце четверти и в конце учебного года. Они, как правило, предшествуют контрольным работам. Содержание таких уроков определяется содержанием пройденной темы или нескольких тем.

Остановимся кратко на характеристике каждого этапа уроков первых двух типов.

1. **Проверка домашнего задания** в начале урока проводится регулярно, ежедневно. Цель проверки — установить, кто не выполнил домашнего задания (если есть такие случаи), как выполнено задание: правильно или неправильно, самостоятельно или несамостоятельно, с достаточным или недостаточным пониманием. Способ может быть разный в зависимости от того, в каком классе проводится проверка, какой материал проверяется, какой ученик подвергается проверке. Более или менее установившимися способами проверки являются следующие:

а) Один из вызванных учеников читает решённые им примеры или задачи по тетради, а остальные ученики следят за его ответами по своим тетрадям. Обнаруженные ошибки тут же исправляются.

Этот способ проверки имеет и другой вариант: вызванный для проверки ученик читает решение примеров и задач не по тетради, а по задачнику (тетрадь ученика в это время находится у учителя). Этот способ применим главным образом в I и II классах, где решаются примеры и задачи с небольшими числами и используются устные приёмы вычислений.

Такой способ проверки стимулирует ученика к самостоятельной и тщательной работе над выполнением домашнего задания, поэтому им нужно пользоваться возможно чаще.

б) Один или несколько учеников вызываются к классной доске, где они, по указанию учителя, решают заданные на дом примеры или полностью, или только частично. Такой способ проверки применим главным образом в III и IV классах, где изучаются письменные вычисления с многозначными числами. Он требует значительной затраты времени, поэтому его следует применять не ежедневно, а в тех случаях, когда проверяется сложный материал или такой материал, где записи имеют существенные особенности (на-

пример, когда проверяется решение задач на деление по содержанию, задач на вычисление площадей и объёмов и др.), или проверяется степень самостоятельности ученика при выполнении им домашнего задания.

При всех способах проверки последнюю нужно проводить в достаточно быстрых темпах с тем, чтобы она, как правило, не занимала более 10 минут. Для этого учителю необходимо тщательно готовиться к проверке домашнего задания, пользоваться в некоторых случаях выборочной проверкой (одни примеры проверить подробно, с объяснением, а в других примерах проверить только ответы), избегать пространных текстовых записей на классной доске, не задерживать весь класс на объяснении и исправлении таких ошибок, которые носят единичный характер (такому ученику при проверке достаточно указать ошибку, а исправить её он должен или самостоятельно, или с помощью учителя, но в другое время — на уроке, после урока, дома).

Необходимо при этом учесть, что каждая домашняя работа ученика подвергается тщательной проверке учителем на дому.

2. **Устный счёт** следует за проверкой домашнего задания. Ему можно отводить от 5 до 7 минут. Упражнение в устном счёте нужно проводить по возможности ежедневно.

На тех уроках, на которых объясняется новый материал, упражнения в устном счёте нужно связывать с этим новым материалом, ставя устный счёт на службу основной цели урока. Устный счёт часто используется для того, чтобы установить связь нового материала с пройденным, с тем, что уже известно учащимся. При такой постановке устного счёта урок приобретает целостный характер, одна часть подкрепляет другую, все этапы ведут к единой цели, которая при таких условиях достигается с бо́льшим успехом. На уроках, занятых только упражнениями, устный счёт может иметь самостоятельное содержание.

3. **Объяснение нового** на уроке происходит обычно в вопросо-ответной форме на специально подобранных задачах и примерах, которые служат исходным материалом для выявления той или иной закономерности и для вывода правила. Учитель своими вопросами и указаниями даёт мысли учащихся определённое направление и подводит их к выводу правила.

Применяя в младших классах вопросо-ответную форму как основную, учитель в старших классах может давать объяснение некоторых вопросов в форме связного изложения. Правильная речь учителя, чёткое, ясное и последовательное изложение является хорошей основой для ясного понимания того, что объясняется.

Готовясь к уроку, учитель должен тщательно продумать, что он объяснит в форме связного изложения, что будет объяснено с привлечением учащихся, что ученики должны только слушать, когда и что они должны записывать в свои тетради.

Вслед за объяснением учителя идёт воспроизведение учащимися того, что объяснено учителем, на решении примеров или

задач. **Один ученик на доске, а все другие ученики в своих тетрадях решают примеры или задачи с подробным объяснением. Эти** первые упражнения служат проверкой того, насколько правильно ученики поняли новый материал, что нуждается ещё в дополнительном объяснении, кто из учащихся испытывает некоторые затруднения и т. д.

Объяснение обычно заканчивается обобщениями, выводом правила. Чтобы учащиеся могли принять активное участие в обобщении и выводе, им должно быть предложено для наблюдения и анализа не один, а несколько примеров, на которых ясно выступает изучаемое свойство или закономерность.

4. **Упражнения.** Для первых упражнений ученики по очереди вызываются к доске, а остальные в это время выполняют эти же задания в своих тетрадях. Первые упражнения идут с подробным рассуждением. Но по мере укрепления и автоматизации навыка, рассуждения становятся всё более и более краткими, немногословными. Главное внимание обращается на правильность, уверенность и скорость выполнения действий. Первые упражнения выполняются под непосредственным руководством и при помощи учителя. Но в дальнейшем ученики становятся всё более и более самостоятельными. На самостоятельную работу можно выделять до 10 мин. Во время самостоятельной работы учитель особое внимание обращает на слабых учащихся: помогает им, даёт дополнительные объяснения. Выполненная работа проверяется.

Упражнение в приобретении новых навыков и умений сочетается с повторением пройденного.

5. **Заданием на дом** урок завершается. Это короткий по времени, но важный по значению этап урока. Задание на дом нужно давать своевременно, до звонка, и при полном внимании учащихся, чтобы они поняли, что и как им нужно сделать к следующему уроку, какие примеры (задачи) решить, сколько, в какой форме, что и как записать, что усвоить наизусть и т. д. Но всегда и подробно раскрывать содержание предстоящей работы, ход решения задачи или примера,— нецелесообразно: это значило бы проделать работу за ученика, лишить задание элемента новизны.

На дом можно давать только то, что обстоятельно объяснено и хорошо понято учениками. Давая материал на только что объяснённое правило, целесообразно вводить в домашние задания материал и из пройденного, для повторения.

По объёму домашнее задание должно быть таково, чтобы выполнение его требовало от учащихся I и II класса 20—30 минут, а от учащихся III и IV классов 30—40 минут.

Подготовка к уроку. План и конспект урока.

Чтобы хорошо провести урок арифметики, к нему нужно тщательно подготовиться. Каждый урок требует основательной предварительной подготовки. В чём же она должна состоять?

Прежде всего нужно в совершенстве знать тот арифметический материал, который входит в содержание урока. Как ни прост и ни элементарен этот материал, тем не менее и в нём нужно совершенствоваться, обновлять свои знания.

При подготовке к уроку нужно, не полагаясь на память, проверить свои знания по учебнику арифметики, чтобы излагать материал урока правильно с научной точки зрения. При малейшем сомнении надо обращаться к учебнику арифметики, памятуя, что всё то, что сообщается на уроке, должно быть абсолютно верно и точно.

Подготовка нужна и по методике ведения урока, и по организации его: всё должно быть продумано, предусмотрено, начиная с больших принципиальных вопросов и кончая «мелочами». Подготовка нужна к каждому этапу урока.

Чтобы подготовиться к проверке домашних заданий, нужно решить примеры и задачи, заданные на дом, и получить к ним ответы; это позволит учителю вести проверку смело, уверенно, не затягивая её. Если предполагается проверить не все, а только некоторые примеры в выборочном порядке, то выбрать наиболее характерные и трудные примеры. Наметить тех учеников, которые должны быть опрошены, и продумать те вопросы, которые будут предложены им для проверки знаний.

Чтобы подготовиться к упражнению в устном счёте, нужно подобрать материал (примеры и задачи) для устного счёта; если нехватает в задачнике, составить свои; наметить форму занятий устным счётом.

Готовясь к объяснению нового материала, нужно подумать, что должно быть повторено из пройденного как основа нового материала. Подобрать материал для повторения пройденного. Продумать, в какой форме может быть сообщена учащимся цель урока. Подобрать примеры и задачи, на которых будет дано объяснение нового материала, и расположить их в определённой системе. Подготовить необходимые наглядные пособия и продумать способ их применения. Наметить формулировку вывода, правила. Подготовить примеры-задачи для проверки, как понято учениками обьяснение учителя.

Готовясь к упражнениям, нужно подобрать в задачнике материал — примеры и задачи, в соответствии с целью урока. Наметить, какие примеры или задачи будут решены под непосредственным руководством учителя, какие — полусамостоятельно и и какие — совершенно самостоятельно.

Для домашнего задания нужно наметить примеры и задачи по задачнику и составить самому недостающие.

Готовясь к уроку, нужно прочитать соответствующие главы методики и использовать материал из своего опыта.

Подготовка к уроку должна быть завершена записью плана урока или составлением конспекта урока. В плане кратко записывается содержание каждого этапа урока, причём форма и со-

держание плана варьируются в зависимости от содержания урока и его целевой установки.

Приведём примерный план урока в IV классе.

План урока в IV классе.

Тема урока. Нахождение числа по данной его части.

Цель урока. На наглядных пособиях и решении простых задач объяснить детям способ нахождения числа по данной одной его части.

Содержание и ход урока.

1. Проверка домашнего задания.
2. Сообщение цели урока.
3. Подготовительные упражнения к вопросам нового материала: повторение раздробления единицы в доли.
4. Объяснение нового материала:

а) на графических образах — отрезке прямой и прямоугольнике;

б) на решении двух простых задач с помощью наглядных пособий — коробка с карандашами и бумажник с деньгами.

Задачи. «В коробке лежит несколько карандашей. Одну пятую их составляют 4 карандаша. Сколько карандашей в коробке?».

«В бумажнике лежат деньги. Одна восьмая часть их равна 5 рублям. Сколько всего денег в бумажнике?»

в) на решении задач без наглядных пособий с записью решения.

Задачи. «$\frac{1}{4}$ *м* материи стоит 2 руб. Сколько стоит метр материи?»

«Пешеход прошёл 5 *км*, и это составляет $^1/_3$ всего пути, который ему надо пройти. Чему равен весь путь?»

Запись решения 1-й задачи:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{4}\textit{м} \text{ —— } 2 \text{ руб.}\\ \frac{4}{4}\textit{м} \text{ —— } x \text{ руб.}\end{array}\right|\ 2 \text{ руб.} \times 4 = 8 \text{ руб.}$$

5. Составление аналогичных задач самими учащимися.
6. Задание на дом: Решить 3 задачи по задачнику на нахождение числа по данной его части (указываются номера задач).

Если краткую запись плана сделать более конкретной и подробной, то план превратится в конспект. В конспекте подробно излагается ход урока. Часто конспект излагается в форме вопросов учителя и ожидаемых ответов ученика. Приведём два конспекта урока арифметики: один — в повествовательной, другой — в вопросо-ответной форме.

Конспект урока в IV классе.

Тема урока. Нахождение числа по данной его части.

Цель урока. На наглядных пособиях и решении простых задач подвести детей к пониманию способа решения задач на нахождение числа по данной его части.

План урока.

1. Проверка домашнего задания.
2. Сообщение цели урока.
3. Подготовительные упражнения к вопросам нового материала в форме устного счёта.
4. Объяснение нового материала на наглядных пособиях и на задачах.
5. Проверка понимания данного объяснения путём придумывания аналогичных задач самими учащимися.
6. Задание на дом.

Содержание и ход урока.

Учитель. Проверим домашнюю работу (для ответа будут вызваны ученики Иванов, Степанов).

Учитель. На этом уроке я познакомлю вас с решением нового вида задач, в которых мы будем находить всё число, если дана его часть. Например: «Если взять одну четвёртую часть моих денег, то это составит 25 руб. Сколько всего денег у меня?» Здесь дана четверть моих денег — 25 руб., и по этой четвёртой части нужно определить все деньги.

Перед решением таких задач повторим, сколько в единице долей; это нам облегчит решение задач.

Сколько в единице четвёртых долей? пятых? восьмых? десятых?

От единицы отнять $^2/_3$. Сколько останется?

От единицы отнять $^3/_5$. Сколько останется? И т. д.

Учитель. Слушайте задачу: «$^1/_3$ отрезка прямой равна 2 *дм*. Чему равен весь отрезок?» (Провожу на доске отрезок длиной в 6 *дм*.)

После повторения задачи и вопроса, что известно в задаче и что требуется найти, ставлю следующие вопросы: В целом отрезке сколько третей? (Три третьих.) Покажите это на доске. (Ученик делит отрезки на 3 равные части и отмечает $^1/_3$.)

Если в одной трети 2 *дм*, то как можно узнать, сколько дециметров во всём отрезке? (2 *дм* надо повторить 3 раза.) Почему? (В одной трети 2 *дм*, а в целом отрезке три третьих; значит, в целом отрезке будет дециметров в 3 раза больше.) Запишите решение.

Ученик записывает: 2 *дм* $\times$ 3 = 6 *дм*.

Учитель. Задача решена. Длина всего отрезка 6 *дм*. Сравните данное число (2 *дм*) и полученное в ответе число (6 *дм*).

Ученик. 6 *дм* больше 2 *дм*.

Учитель. Так оно и должно быть: 2 *дм* — часть отрезка; 6 *дм* — весь отрезок. Что было известно? (Часть отрезка.) Что нашли? (Весь отрезок.)

Учитель. Решим вторую задачу: «Картофелем засажена $^1/_4$ всего поля и это составляет 3 *га*. Чему равна вся площадь поля?» После повторения задачи и выяснения, что в задаче дано и что требуется найти, делается чертёж и ставятся следующие вопросы:

Покажите $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$ поля.

Сколько гектаров в одной четверти поля? (3 *га*)

Как узнать, сколько гектаров во всём поле? (Нужно 3 *га* повторить 4 раза или умножить на 4.) Запишите это. Ученик записывает: 3 *га* × 4 = 12 *га*. (В такой форме развёртывается содержание и остальной части урока.)

Из приведённого образца ясно содержание конспекта и стиль его изложения. В нём точно ставятся вопросы, проектируемые учителем, и приблизительно намечаются предполагаемые ответы учащихся.

Конспект урока по арифметике в III классе

Тема урока. Деление многозначного числа на трёхзначное.

Цель урока. Объяснить детям способ нахождения частного при делении четырёхзначного числа на трёхзначное (при однозначном частном).

Содержание и ход урока.

1. Формулировка цели урока. Цель данного урока может быть сформулирована, примерно, так: «Вы, дети, умеете делить многозначное число на двузначное. Теперь перед нами стоит задача — научиться правильно и довольно быстро делить многозначное число на трёхзначное. С таким делением вы будете часто встречаться при решении задач. Сегодня я объясню вам первый, более простой случай такого деления, когда в частном получается всего только одна цифра».

2. Подготовка учащихся к сознательному восприятию и пониманию нового материала.

Для данного урока основой является: а) уменье делить многозначные числа на круглые сотни, б) уменье устно умножать трёхзначные числа на однозначные, в) понимание связи деления с умножением и уменье пользоваться этой связью для проверки деления и проверки цифры частного.

Исходя из этого, для повторения (в форме устных упражнений) даются следующие примеры и задачи:

а) Деление на круглые сотни: 600 : 300; 1 200 : 400; 2 500 : 500. Цель этих упражнений — подчеркнуть, что для отыскания частного достаточно число сотен делимого (6, 12, 25) разделить на цифру сотен делителя (3, 4, 5).

б) Устное умножение трёхзначных чисел на однозначное: 480×2; 530×4; 780×3.

в) Проверка деления при помощи умножения: «Разделите 48 на 16. Сколько получится? Проверьте частное». «Разделите 74 на 12. Сколько получится? Проверьте результат».

г) Задачи: 1) «Самолёт летит со скоростью 400 *км* в час. Во сколько часов он пролетит расстояние в 1 200 *км*?» 2) «Метр сукна стоит 120 руб. Сколько стоят 7 *м* такого сукна?»

3. *Объяснение нового материала.* Объяснение даётся на примерах, которые подбираются так, чтобы на них легко можно было обнаружить изучаемую закономерность и кратчайшим путём подвести учеников к необходимым обобщениям. Раскрываемая перед детьми на данном уроке закономерность состоит в следующем: при делении трёх- четырёхзначного числа на трёхзначное в частном получается такое же число, какое получается и при делении сотен делимого на цифру сотен делителя, поэтому при делении трёх- или четырёхзначного числа на трёхзначное для отыскания цифры частного нет надобности делить всё делимое на весь делитель; достаточно только сотни делимого разделить на цифру сотен делителя и полученное частное проверить.

Достижению этой цели будут служить следующие примеры:

1) 1 248 : 312; 2) 2 580 : 516; 3) 1 392 : 232; 4) 2 925 : 415.

Особенности этих четырёх примеров заключаются в следующем: а) во всех примерах в качестве делителей взяты числа, близкие к круглым сотням, б) в первых двух примерах сотни делимого делятся на сотни делителя нацело, без остатка (12 : 3, 25 : 5); в последних двух примерах при делении сотен делимого на сотни делителя получается остаток (13 : 2, 29 : 4), в) деление сотен делимого на сотни делителя сразу даёт правильную цифру частного; так, разделив в первом примере 12 сотен на 3 сотни, получаем 4; при проверке оказывается, что полученная таким лёгким способом четвёрка является частным для чисел 1 248 и 312. Таким образом, связь между частным от деления только сотен данных чисел и частным от деления данных чисел, обнаруженная на первом примере, повторяется далее ещё в трёх случаях. Этого достаточно, чтобы дети уловили в этом повторяющемся явлении изучаемую закономерность, сделали обобщение и пришли к выводу правила нахождения цифры частного. Объяснение начинается с решения знакомого детям примера:

```
_1 825 | 300
 1 800 |----
 -----    6
    25
```

При пояснении решения подчёркивается, что для нахождения результата достаточно 18 разделить на 3 (18 сотен на 3 сотни).

После этого предлагается первый пример из нового материала:

```
1 248 | 312
      |----
```

Делитель 312 близок к 300. Поэтому попробуем делить не на 312, а на 300. Получаем в частном число 4. Можно ли, получив 4, сразу записать эту четвёрку в частное? Нет, нельзя, потому что она получилась от деления на 300, а в данном примере нужно делить не на 300, а на 312. Так как 300 и 312 — числа близкие между собой, то возможно, что при делении и на 312 получится 4, но эту возможность надо проверить. Умножаем 312 на 4; получаем 1 248.

Значит, число 4 есть частное от деления 1 248 на 312. Теперь можно поставить «4» в частное. Запись решения будет иметь следующую форму:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r}1\,248\\1\,248\end{array} & \underline{312}\\ \hline 0 & \;\;4 \end{array}$$

Чтобы учащиеся могли воспринять применённый приём как общий, им даются один за другим ещё 3 примера с подробным объяснением.

4. Воспроизведение объяснения учащимися. Чтобы узнать, достаточно ли правильно и глубоко поняли учащиеся объяснение, детям предлагается решить три примера того же типа:

1) 1 688 : 417, 2) 4 368 : 624, 3) 3 632 : 718.

В первом примере цифра частного получается путём деления 16 на 4; во втором примере — путём деления 43 на 6 и в третьем примере — путём деления 36 на 7. В первых двух примерах — деление без остатка, в третьем примере — деление с остатком. Таким образом, по своей структуре примеры полностью совпадают с теми, которые объяснены учителем.

Для решения каждого примера один учащийся вызывается к доске, остальные решают эти же примеры в своих тетрадях. Давая пояснения к решению, учащийся в точности воспроизводит ту схему рассуждений, которой пользовался учитель.

5. Обобщение, вывод. На объяснении четырёх примеров учащиеся подметят их различие (различные числа) и их сходство: во всех примерах делимое — четырёхзначное число, делитель — трёхзначное число. И главное: во всех таких случаях частное находится одним и тем же способом. Так в сознании ученика происходит обобщение, переход от конкретного и единичного к общему, отвлечённому. На основе этого обобщения формулируется вывод: «Чтобы разделить четырёхзначное число на трёхзначное, достаточно сотни делимого разделить на сотни делителя и полученное число проверить».

6. Задание на дом. Решить 5 примеров такого же типа, которые были объяснены в классе, и задачу, в которой встречается разобранный в классе случай деления.

Из приведённых образцов видно, что составление конспекта требует от учителя большой работы и отнимает у него много времени. Поэтому нельзя требовать составления конспекта на каждый урок.

Конспекты рекомендуется составлять на такие уроки, где выясняются наиболее сложные и трудные понятия, и на открытые (пробные, показательные) уроки. Начинающие учителя, больше чем опытные, нуждаются в подробных планах и конспектах, поэтому они должны составлять конспекты чаще.

Анализ урока арифметики.

Методическое мастерство даётся не сразу; оно вырабатывается в результате большого опыта, постоянной и упорной работы учителя над собой, над пополнением своих знаний.

Растёт и совершенствуется тот учитель, который осмысленно и критически относится к своим методам и приёмам преподавания. У учителя не должно быть безразличного отношения к данному им уроку. Каждый урок имеет свою цель. Идя на урок, учитель должен держать эту цель в поле своего внимания. Выходя с урока, он должен спрашивать себя: «Достиг ли урок своей цели? Выполнен ли намеченный план? Что хорошего и что плохого было на уроке? Какие выводы нужно сделать из данного урока для дальнейшей работы?»

Учитель должен воспитать в себе привычку к самокритике и самоконтролю. Только тот учитель будет совершенствоваться, который будет постоянно развивать в себе качества педагогической самокритики. Анализирующая мысль учителя должна быть, в первую очередь, направлена на недостатки, замеченные им на уроке.

Почему не все ученики выполнили домашнее задание? Не кроется ли причина этого в перегрузке задания материалом?

Почему некоторые ученики затруднялись отвечать, казалось бы, на простые вопросы? Не являлось ли это следствием некоторой неясности и недостаточной системы в объяснениях учителя?

Почему были случаи нарушения дисциплины на уроке? Не было ли это результатом снижения у учащихся интереса к уроку вследствие однообразия методов и приёмов работы или отсутствия нового в материале урока?

Почему разбор задачи проходил с большим затруднением? Не было ли здесь ошибки в выборе метода разбора или в постановке вопросов, или в недостатке наглядности?

Почему урок не уложился точно в намеченное время, на каких этапах было замедление и чем оно вызвано? И т. д.

Поставив вопрос, нужно найти на него ответ, выявить причину, дать объяснение отмеченного факта. При таком отношении к делу практическая работа учителя будет осмысленной; опыт, проведённый через контроль сознания и самокритики, поднимает качество обучения и гарантирует от повторения ошибок.

Наряду с недостатками нужно уметь замечать и то хорошее, ценное, что было на уроке.

Дети нередко поражают нас своей изобретательностью, своей сообразительностью: они иногда дают оригинальные и вместе с тем рациональные приёмы устных вычислений, придумывают свои, нередко остроумные, способы и приёмы решения задач.

Нужно не только подмечать эти факты, но и фиксировать их в дневниках или в записных книжках, чтобы эти факты не исче-

зали бесследно. Педагогическая практика советских учителей изобилует образцами выдающегося педагогического мастерства. Но чтобы это мастерство и прекрасные результаты обучения становились достоянием широких масс, нужно начинать с «малого»: нужно выше поставить культуру наблюдения и записей отдельных первичных фактов, выявляемых на уроках.

Примерная схема анализа открытых (пробных, показательных) уроков.

Проверка домашнего задания. Все ли ученики выполнили домашнее задание. Установлена ли причина невыполнения задания (если таковое было). Тщательность и темп проверки. Исправлены ли и объяснены ли допущенные ошибки. Выявлена ли самостоятельность выполнения работы учащимися.

Упражнение в устном счёте. Материал упражнений: его соответствие цели урока и программе. Форма упражнений: её соответствие цели урока и возбуждению интереса у учащихся. Уделялось ли внимание применению наиболее рациональных приёмов вычислений. Все ли учащиеся работали достаточно активно и самостоятельно.

Объяснение нового материала. Понятно ли для детей сформулирована цель урока. Установлена ли связь нового материала со старым. Удачно ли подобраны наглядные пособия; хорошо ли они использованы. Обеспечена ли стройность и систематичность в развёртывании материала. Всегда ли ясно, точно и правильно ставились вопросы. Не было ли погрешностей против научности в изложении материала. Привлекались ли учащиеся к формулировке вывода. В достаточной ли мере была использована активность и самостоятельность учащихся при объяснении нового материала.

При анализе урока, на котором решаются задачи, отмечаются достоинства и недостатки: в усвоении условия задачи, в методе разбора задачи, в составлении плана решения, в записи вычислений. В какой мере учитель опирался при решении задачи на инициативу, самостоятельность и творчество самих учащихся.

Воспитательная сторона урока. Порядок и дисциплина на уроке. Соблюдение на уроке «Правил для учащихся». Связь учебного материала (задач) с современностью. Отражение в содержании задач практики социалистического строительства.

Соблюдение на уроке общедидактических требований. Вовлекался ли в работу весь класс. Оказывалась ли помощь отстающим. Исправлялись ли неправильные или неточные ответы учащихся. Во-время ли и в понятной ли форме дано учащимся домашнее задание. Речь и поведение на уроке самого учителя (его педагогический такт).

Итоги анализа урока (подводятся руководителем). Достоинства и недостатки урока со стороны: а) научности изложения,

б) правильности и целесообразности методических приёмов, в) организации занятий, г) стройности, целостности и подчинения всех частей урока его основной цели. В какой мере достигнута образовательная и воспитательная цель урока?

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ ПО АРИФМЕТИКЕ.

Самостоятельные работы по арифметике являются хорошим средством для усвоения и закрепления знаний, для формирования навыков, так как в самостоятельной работе создаются наиболее благоприятные условия для проявления инициативы и творческих способностей ученика, для развития его внимания и воли.

Воспитание самостоятельности в мышлении и действиях должно красной нитью проходить через каждый этап урока. Проводя, например, упражнения в устном счёте, нужно добиваться, чтобы каждый ученик производил вычисления совершенно самостоятельно. Объясняя новый материал и сообщая детям готовые знания, нужно ставить перед детьми вопросы, которые будили бы у них самостоятельную мысль, ставили бы их перед необходимостью наблюдать факты, сравнивать и сопоставлять их и приходить к самостоятельным обобщениям и выводам. Яркое выражение находит самостоятельность в выполнении различного рода *упражнений*, в решении примеров и задач. Такие самостоятельные работы проводятся обычно на большинстве уроков, занимая 5—10 минут.

Общие требования к организации самостоятельных работ по арифметике кратко можно сформулировать так:

1. Каждая самостоятельная работа должна быть тщательно *подготовлена*. Учитель должен наметить конкретно *цель* работы и в соответствии с ней подобрать материал — примеры и задачи. Материал должен быть посильный для учащихся. Для самостоятельного выполнения даётся только то, что заранее обстоятельно объяснено учителем и хорошо понято учащимися.

Особенно ценен материал, включающий в себе элементы самоконтроля; например, решение круговых примеров, работа с занимательными квадратами, составление рядов по определённому правилу; иногда даются для этой цели ответы, которыми учащийся пользуется по окончании работы.

2. Перед выполнением работы учитель должен обстоятельно проинструктировать учеников, что и как они должны выполнить, какова ближайшая цель работы, как пользоваться самопроверкой в процессе выполнения задания. Предупредить детей о тех трудностях, с которыми они могут встретиться, и указать способы их преодоления. Вслед за инструктажем надо удостовериться, правильно ли ученики (и в первую очередь более слабые из них) поняли задание и способ его выполнения. При инструктаже нужно пользоваться не только рассказом, но и *показом*.

3. В ходе выполнения работы нужно следить за тем, чтобы все дети работали активно и притом действительно самостоятельно, не списывая друг у друга. Более слабым учитель может помочь дополнительными объяснениями, наводящими вопросами, показом образцов выполнения работы и другими способами. В ходе работы учитель при помощи наблюдения должен удостовериться в том, что ученики выполняют задание правильно.

4. Каждая самостоятельная работа по её выполнении должна быть проверена и допущенные ошибки исправлены. При проверке нужно спрашивать не только результаты, не только что сделал ученик, но и требовать объяснений, как и почему он получил тот или иной результат, каким способом производил вычисления, как рассуждал при решении задачи.

Содержание самостоятельной работы учащихся каждого класса зависит от программы и всецело определяется ею. Основным материалом для самостоятельной работы являются задачи и примеры.

В самостоятельные работы может входить также материал и из других разделов программы: элементы теории, связанной с усвоением арифметических действий (это относится в первую очередь к III и IV классам), некоторые измерительные работы, работы по черчению, упражнения в устном счёте и др.

При обучении детей решению задач степень самостоятельности учащихся может быть различной в зависимости от характера задачи, от её сложности и трудности. Задачи нового типа или новой разновидности, а также задачи сложные по своему построению должны решаться под непосредственным руководством учителя, на основе его объяснений, анализа. Задачи простые, «прозрачные» по своему построению, не вызывающие у учащихся каких-либо затруднений, могут решаться учащимися самостоятельно в порядке упражнений, тренировки. Но между задачами, не доступными для самостоятельного решения и вполне посильными для такого решения, может быть ряд задач, которые посильны учащимся только в некоторой мере, которые требуют от учителя частичной помощи. Решение таких задач будет носить полусамостоятельный характер.

Итак, в зависимости от характера задач учащимся могут даваться:

1. Задачи для полного самостоятельного решения от начала до конца. Учитель называет или номера задач по задачнику, или даёт текст своей задачи, указывает, как её решать — с вопросами или без вопросов, и затем предоставляет учащихся самим себе.

Такой вид работы целесообразно применять в тех случаях, когда нужно потренировать учащихся в решении ряда однотипных задач, ранее объяснённых и достаточно хорошо понятых учащимися.

2. **Задачи для частично самостоятельного решения:**

а) Учитель проводит с учащимися разбор задачи. Всё остальное, т. е. составление плана решения и решение, предлагает ученикам выполнить самостоятельно. Этот приём целесообразно использовать в тех случаях, когда предлагаемая задача может представить некоторую трудность для учащихся вследствие сложной зависимости между данными в задаче величинами.

б) Учитель проводит с учащимися разбор задачи и составление плана (устно). Письменная же формулировка вопросов, самое решение, т. е. подбор числовых данных, действий и вычисления производится учащимися самостоятельно. Этот приём целесообразен тогда, когда способ решения задач данной разновидности ещё не закреплён и требуется значительная помощь учителя.

3. Задачу, проанализированную учителем и решённую под его руководством без письменного плана, учитель может предложить на следующий день решить самостоятельно с письменным планом. Использование этого приёма полезно в тех случаях, когда учащиеся решают вторую-третью задачу данного типа или вообще трудную арифметическую задачу.

4. Полезно давать некоторые задачи для предварительного самостоятельного продумывания учащимися, т. е. для её анализа и самостоятельной намётки плана. После этого задача решается с учителем.

5. В качестве самостоятельной работы полезно иногда предлагать самим учащимся составить задачу, аналогичную тем, которые перед этим решались по задачнику. Этот вид работы применим главным образом в III и IV классах при обучении детей решению типовых задач. Но и в младших классах составление задач учащимися тоже должно иметь место; здесь эта работа проводится под непосредственным руководством учителя.

Такой характер имеют самостоятельные работы в III и IV классах, где учащиеся уже обладают некоторыми навыками самостоятельности в работе. В I и II классах эти навыки значительно слабее, и здесь нужно почаще приходить на помощь ученикам. Прежде чем давать задачу для решения, нужно прочитать её условие, чтобы научить детей читать текст задачи (это чтение имеет свои особенности). Здесь чаще приходится давать в качестве самостоятельной работы запись решения той задачи, которая предварительно решена устно вместе с учителем.

Решение примеров служит наиболее частым содержанием самостоятельной работы учащихся.

На этих упражнениях у учащихся вырабатываются твёрдые вычислительные навыки. Упражнения нужно, по возможности, разнообразить, чтобы они вызывали к себе интерес, будили творческую мысль учащихся, чтобы работа не была шаблонной. Поэтому наряду с решением столбиков по задачнику или с доски

нужно задания давать и в другой форме. Укажем некоторые из них.

1. Учитель пишет на доске несколько примеров с готовыми решениями, причём среди этих решений имеется одно неверное. Даётся задание перерешать примеры, проверить результаты и найти ошибку.

2. Ученики решают очередные столбики по задачнику. Затем на следующем уроке предлагается произвести проверку решённых примеров путём обратных действий и перестановки компонентов, где это возможно (при сложении и умножении).

3. После решения по задачнику ряда однотипных примеров ученикам даётся задание самим составить несколько аналогичных (похожих) примеров и решить их.

4. Полезно в конце работы по тому или иному разделу предлагать учащимся решать примеры не только на правильность, но и на скорость. Ученикам даётся, допустим, для самостоятельной работы 10 минут и предлагается решить по задачнику за это время возможно больше примеров. В конце учитывается, кто сколько решил, и лучшей признаётся работа того ученика, который производит вычисления не только правильно, но и быстро.

5. Для внесения разнообразия в работу можно предлагать учащимся примеры, записанные не в строчку, а в какой-либо иной форме, например в форме занимательных квадратов, кругов и т. д.

6. Большое количество разнообразных упражнений можно дать, пользуясь таблицами для устного счёта. Перед учащимися вывешивается таблица на классной доске (табл. Шапошникова). Пользуясь этой таблицей, можно проделать многочисленные и разнообразные упражнения.

Упражнения в сложении можно производить в троякой форме:

1. Можно складывать числа одного столбика с числами другого столбика — смежного и несмежного с ним.

2. Можно складывать числа одной строки (ряда) с числами другой строки — смежной и несмежной с ней.

3. К числам того или иного столбика (строки) можно прибавить любое заданное число — однозначное и двузначное.

Упражнения могут производиться в форме самостоятельной работы учащихся.

В конце урока учитель обязательно проверяет результаты самостоятельной работы.

Изучение «геометрического материала», т. е. вычисление площадей и объёмов в IV классе, даёт широкий простор для практических работ — для различных измерений и черчения. Часть этих работ может быть проведена в порядке самостоятельных работ учащихся. После того как учащиеся ознакомятся с правилом вычисления площадей, нужно дать ряд упражнений на вычисление площадей: вычислить площадь переплёта книги, граней пенала, площадь стола, парты, прямоугольника из картона или фанеры; а) начертить квадрат со стороной 8 *см*; б) начертить прямоугольник, длина которого 10 *см*, ширина 6 *см*; в) начертить план прямоугольного земельного участка, у которого длина 120 *м*, ширина 80 *м*; масштаб: 1 *см* = 10 *м*; г) начертить прямоугольник произвольного размера (по выбору самого ученика) и найти его площадь.

Так же проводятся самостоятельные работы на вычисление объёмов тел, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда.

ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ.

Одним из непременных условий успешного обучения арифметике является систематическая и правильно поставленная проверка знаний учащихся.

Существуют два основных способа проверки знаний по арифметике: 1) устный опрос и 2) письменные контрольные работы. Кроме того, учитель использует в этих целях: а) свои повседневные наблюдения за работой учащихся в классе и б) письменные домашние работы учащихся.

Устный опрос.

Путём устного опроса могут быть проверены: устный счёт, письменные вычисления, решение задач.

Проверку знаний в форме устного опроса удобно приурочивать к проверке домашних заданий. Планируя урок, учитель намечает для опроса двух-трёх учеников. Они отвечают заданный урок. В дополнение к этому учитель предлагает им вопросы из ранее пройденного. По своему содержанию эти дополнительные вопросы должны охватывать основные разделы программы: устный счёт, письменные вычисления, решение задач.

Для проверки знаний учащихся могут быть использованы и другие этапы урока: этап упражнений с вызовом учащихся к доске, этап самостоятельной работы учащихся. Допустим, что учащиеся упражняются в решении примеров. Вызванному к доске ученику, решающему пример, учитель может предоставить значительную долю самостоятельности, дать ему дополнительно решить устную задачу, два-три примера для устного счёта и на основании этой проверки поставить соответствующую оценку. Во время самостоятельной работы всего класса один из учащихся может быть вызван к доске для устного опроса. Не следует ставить оценку за ответы на вопросы, касающиеся нового материала, который только что объяснён, или за ответы на беглые вопросы учителя.

При оценке ответов учитывается:

в устном счёте — правильность и быстрота вычислений, уменье пользоваться наиболее рациональным для каждого данного случая приёмом вычислений;

в письменных вычислениях — уменье правильно и уверенно выполнять арифметическое действие и преобразование, уменье объяснять выполняемое действие;

в решении задачи — знание способов и приёмов решения задач, уменье объяснить решение.

Письменные контрольные работы.

Письменные контрольные работы дают возможность одновременно в течение короткого срока (одного урока) проверить знания всех учащихся в классе и сделать документально обоснован-

ный вывод о знании учащимися пройденного материала, который является содержанием контрольной работы.

Контрольные письменные работы бывают двоякого рода: а) сопровождающие процесс обучения тому или иному навыку и б) заключительные, т. е. завершающие изучение данного раздела или темы. Первые охватывают небольшой круг вопросов, даются обычно в конце урока на непродолжительное время (10—15 минут) в качестве самостоятельной работы, и оценка их не заносится в классный журнал. Цель этих работ — своевременно выявить ошибки и недочёты с тем, чтобы на ходу, в процессе работы, их исправить.

Заключительные контрольные работы даются по окончании изучения раздела (темы), им уделяется особый урок, оценка их заносится в классный журнал и учитывается при выведении отметки за четверть. В дальнейшем мы будем говорить только о такого рода контрольных работах.

Содержание контрольной работы определяется содержанием пройденного раздела. В неё входит всё главное, существенное, основное из этого раздела.

Контрольные работы могут быть или комбинированные, т. е. состоящие из примеров и задач, или однородные, т. е. состоящие только из примеров или только из задач. Последние имеют преимущество перед первыми: в них внимание учащихся не разбрасывается на выполнение работ, различных по форме и содержанию, что даёт возможность учащимся полнее выявить свои знания, а оценка в таких условиях приобретает большую определённость. В III и IV классах рекомендуется проводить преимущественно однородные работы.

По объёму контрольные работы должны быть таковы, чтобы учащиеся могли выполнить их не торопясь в течение урока.

I класс. В первом полугодии проверочная работа может состоять из 12 примеров в одно действие, а во втором полугодии — из 14—16 примеров в одно действие.

Во втором полугодии в письменные работы I класса включаются и задачи. В 3-й четверти этого класса работа должна состоять из 1 задачи в два действия и 6 примеров в одно действие. В 4-й четверти работа должна состоять из 1 задачи в два действия и 8 примеров в одно действие.

II класс. Письменная работа в первом полугодии может состоять: а) из 12—16 примеров в одно действие или б) из 1 задачи в два-три действия и из 6—8 примеров в одно действие.

Во втором полугодии письменная работа может состоять: а) из 12—16 примеров в одно действие, решаемых полуписьменно (действия производятся с помощью устных приёмов вычислений, но данные и результаты записываются), или б) из 1 задачи в три действия и 6—8 примеров в одно действие.

III и IV классы. Письменная работа может состоять: а) из 8—10 примеров в одно действие или б) из 2 задач, одна из которых решается с письменными вопросами, а другая — только с записью действий.

Примеры и задачи для контрольной работы оставляются либо самим учителем, либо берутся им готовыми из различных источников. Условие задачи должно быть сформулировано просто,

ясно, точно. Содержание задачи должно полностью отвечать тому, что учениками фактически пройдено. Составив задачу, нужно её решить, чтобы удостовериться в том, что числовые данные подобраны правильно и вопрос поставлен ясно.

Для контрольной работы может быть взята и готовая задача из какого-либо задачника, но только не из того, который принят в данном классе.

Подготовка к контрольной работе должна быть тщательной. Учащиеся должны заранее (лучше накануне) подготовить листки бумаги (если нет особых тетрадей для этой цели), ручки, перья, чернила. На листках должна быть сделана надпись: «Контрольная работа по арифметике ученика ... класса ... число ... месяц ... год ...»

Подготовленные для контрольной работы задачи и примеры обычно записываются во время перемены на классной доске. Запись на доске должна быть чёткой, крупной, разборчивой. Задачи и примеры в контрольной работе даются в двух одинаковых по трудности и аналогичных по содержанию вариантах.

Чтобы не тратить времени на записи и поставить учеников в наиболее благоприятные условия при выполнении работы, рекомендуется подготовлять заранее для каждого ученика листок с написанной на нём задачей и примерами.

Ответы к задаче и примерам ни в коем случае не сообщаются учащимся.

Каждый ученик должен выполнять работу совершенно самостоятельно. Учитель должен принимать все меры к тому, чтобы предупреждать списывание. Одним из средств борьбы со списыванием является наличие у каждого ученика особого листочка с написанной на нём контрольной работой. Выполнение работы должно проходить в спокойной обстановке и при полной тишине.

Учитель во время контрольной работы находится впереди класса и наблюдает за тем, чтобы каждый ученик работал вполне самостоятельно. Хождение по классу, заглядывание в ученические тетради, замечания отдельным ученикам по существу работы, ответы на их вопросы не должны иметь места.

Особых листочков для черновых записей в I, II и III классах допускать не следует, все вычисления ученик должен записывать на том листе, где выполняется контрольная работа. Но в IV классе, где работы носят более сложный характер, можно разрешить учащимся пользоваться черновиком при условии, что черновики сдаются вместе с контрольной работой. Однако при пользовании черновиком в контрольной работе все записи должны быть полными, со всеми промежуточными вычислениями.

Проверка контрольной работы проводится без промедления с тем, чтобы результаты работы могли быть сообщены учащимся уже на следующий день. Оценка ставится в зависимости от количества и качества ошибок.

Ошибки бывают разные[1]. Одни ошибки свидетельствуют о незнании или непонимании учащимися программного материала, неуменье применять правило, выполнять то или иное действие. Другие ошибки являются результатом не вполне твёрдых знаний или недостаточной устойчивости внимания.

Ошибки первого рода являются более грубыми. Ошибки второго рода — менее грубыми.

Грубыми ошибками следует считать:

1) ошибки в вычислениях как в примерах, так и при решении задач;

2) ошибки в решении задачи: неточности в плане, пропуск действия в середине или в конце, неправильный выбор действий, неправильный выбор числовых данных, неправильная постановка вопросов, ошибки в наименованиях, свидетельствующие о непонимании учащимся задачи.

Менее грубыми ошибками считаются:

1) нерациональный приём в вычислениях;

2) пропуск наименований, либо постановка их там, где не следует ставить;

3) неточно сформулированный вопрос к действию при решении задачи;

4) ошибки, допущенные при списывании числовых данных или знака действия при правильном решении; например, вместо $65+18=83$, ученик записал $66+18=84$ или $65-18=47$; при решении же задач неправильное применение знака действия (выбор действия) считается грубой ошибкой.

5) не доведённые до конца преобразования, например, при сложении или вычитании дробь оставлена без сокращения, из неправильной дроби не исключено целое число; в простом именованном числе не сделано превращение; например, 325 *кг*$\times$160= =52 000 *кг*.

Повторяющиеся негрубые одни и те же ошибки (например, неправильная постановка наименований) принимаются за одну ошибку.

Оценка контрольной работы проводится по тем критериям, которые установлены Министерством просвещения РСФСР и опубликованы в «Нормах оценки успеваемости учащихся по арифметике» (изд. 1949 г.).

Письменные работы, состоящие только из примеров, оцениваются так:

Отметка «5» ставится, если все примеры решены правильно, в вычислениях применены наиболее рациональные приёмы; записи решения примеров выполнены аккуратно и расположены последовательно; сделана проверка решения в тех случаях, когда это требуется.

Отметка «4» ставится, если в работе допущены 1—2 ошибки, причём не более одной грубой.

---

[1] Изложение дано по «Нормам оценки знаний и навыков учащихся по арифметике».

Отметка «3» ставится, если в работе допущены 2—4 ошибки, причём не более двух грубых.

Отметка «2» ставится, если при решении примеров допущены 3—6 ошибок, причём не более трёх грубых ошибок.

Отметка «1» ставится, если в работе допущено свыше трёх грубых ошибок.

При оценке письменных работ, состоящих только из задачи, отметка «5» ставится, если задача решена правильно: правильно составлен план решения задачи, правильно выбраны действия, точно сформулированы все вопросы к ним, правильно поставлены наименования, все вычисления выполнены верно с применением наиболее рациональных приёмов, записи выполнены аккуратно, расположены последовательно.

В случае, если ученик даёт свой оригинальный, вполне рациональный приём решения задачи, отметка «5» может быть поставлена и при наличии в работе одного-двух несущественных недочётов.

Отметка «4» ставится, если правильно составлен план решения задачи, правильно выбраны все действия, но при решении допущены 1—2 ошибки, из них не более одной грубой.

Отметка «3» ставится, если при правильном ходе решения задачи допущены 2—4 ошибки, причём не более двух грубых.

Отметка «2» ставится, если ход решения задачи неправилен.

Отметка «1» ставится, если ученик не приступил к работе или свёл решение к случайному комбинированию чисел.

Письменные работы, состоящие из примеров и задач, оцениваются по такой шкале:

В тех случаях, когда письменная работа состоит из примеров и задач, можно ставить или одну общую отметку или две отметки отдельно за обе части работы (в случае резкой разницы в качестве выполнения каждой части работы), причём: а) если обе части работы выполнены одинаково (например, обе на «5», на «4» и т. д.), эта отметка и должна быть общей для всей работы в целом; б) если оценка обеих частей разнится на одну ступень, например: даны оценки «5» и «4» или «4» и «3» и т. п., то за работу в целом ставится низшая из двух данных отметок.

Низшая из двух данных оценок ставится и в том случае, когда часть работы оценена отметкой «5», а другая «3», но учитель может оценить такую работу и «4», если оценка «5» поставлена за основную часть работы.

Если одна из частей работы оценена «5» или «4», а другая «2» или «1», то за всю работу учитель может поставить оценку «3», если высшая из двух данных оценок поставлена за основную часть работы.

Если работа выполнена плохо, то полезно после оценки кратко написать, что ученику нужно сделать, чтобы ликвидировать допущенные ошибки: решить такие-то номера задач, прорешать такие-то номера примеров.

Закончив проверку и поставив оценки, нужно проанализировать ошибки, допущенные детьми, и установить, какие же вопросы оказались слабо усвоенными. По каким рубрикам производить анализ — это зависит от содержания работы.

При проверке решения задач ошибки можно классифицировать по таким признакам: а) ошибки в плане, б) ошибки в вычислениях, в) ошибки в формулировке вопросов, г) ошибки в постановке наименований и др.

Следующий урок посвящается разбору результатов контрольной работы. Этот урок начинается с краткой характеристики выполненной работы: учитель разъясняет, каких знаний и умений требовала она от ученика и как учащиеся справились с ней; по-

казываются повторяющиеся ошибки; на классной доске учитель показывает, как надо было решить пример или задачу.

Охарактеризовав работу класса, учитель характеризует работу каждого ученика (или в случае недостатка времени, работы нескольких учеников, заслуживающие особого внимания). После этого работы раздаются учащимся на руки для того, чтобы они могли исправить допущенные ошибки. Если остаётся время, то на этом же уроке решаются такие примеры (задачи), которые помогают ликвидировать обнаруженные недочёты. При недостатке времени эта работа переносится на следующие уроки.

Устранение пробелов в знаниях учащихся.

Вся система проверки знаний учащихся, в особенности система письменных контрольных работ, должна быть так построена, чтобы она позволяла учителю своевременно и полностью выявлять пробелы в знаниях и навыках учащихся. Для этого необходимо строго соблюдать указанные выше требования к содержанию и форме проведения контрольных работ. Из этих требований особое значение имеют: а) раздельная проверка решения задач и примеров в старших классах, при которой оценка не является «средне-арифметической», б) последующий анализ результатов работы с двух точек зрения: 1) как решена каждая отдельная задача и каждый отдельный пример и 2) как выполнил работу каждый отдельный ученик.

Если в результате проверки у отдельных учащихся обнаружатся в знаниях те или иные пробелы, то задача учителя в таких случаях заключается в том, чтобы принять меры к немедленной их ликвидации, используя для этого различные формы работы в зависимости от степени отсталости ученика.

«Математика,— говорит Н. К. Крупская,— это цепь понятий: выпадет одно звенышко — и непонятно будет дальнейшее». И дальше, вспоминая годы своей педагогической практики, Н. К. Крупская пишет: «У меня очень удачно проходили уроки по арифметике и алгебре. Помогало больше всего то, что я всегда проверяла, нет ли у учащихся каких-либо пробелов»[1].

Если пробел касается одного какого-нибудь вопроса и объясняется недостатком упражнений, то ученику дают добавочные задания для самостоятельного их выполнения в классе и дома. Выполняя эти задания, ученик получает навыки, необходимые для дальнейшей успешной работы вместе со всем классом.

Если же пробел в знаниях затрагивает более широкий круг вопросов и зависит от непонимания их сущности, то самостоятельная работа может оказаться недостаточной.

В таком случае целесообразно провести с учеником дополни-

---

[1] Н. К. Крупская, Избранные педагогические произведения. Изд. АПН. 1948, стр. 264.

тельные индивидуальные занятия во внеурочное время, чтобы не тормозить работу всего класса.

И, наконец, встречаются случаи, когда у ученика обнаруживается глубокое отставание, связанное с пробелами в знаниях по нескольким разделам. Ликвидация такого отставания требует более продолжительных дополнительных занятий и также во внеурочное время. Такие занятия должны быть строго индивидуализированы. Предварительно должно быть выяснено, что знает и чего не знает отстающий ученик. Работа должна быть начата с того, что ученик хорошо знает. Далее она должна вестись по плану, в котором намечены все основные ступени, ведущие к тому разделу знаний, по которому обнаружены пробелы. Каждая ступень должна быть тщательно изучена.

Приведём примеры. Ученик III класса не справился с арифметической задачей в 4 действия. Предложим такому ученику решить более лёгкую задачу в 2—3 действия. Допустим, что ученик хорошо справляется с «приведёнными» задачами в 2 действия. Эти задачи и должны служить исходными в системе индивидуальной работы с данным учеником. Следующие ступени в этой системе будут: а) решение неприведённых задач в 2 действия с различными математическими понятиями: разностного и кратного сравнения, увеличения и уменьшения числа в несколько раз и на несколько единиц и др.; б) решение задач в 3 действия с различными случаями применения арифметических действий — приведённые и неприведённые; в) решение задач в 4 действия с теми же усложнениями.

Если ученик IV класса не справляется с задачами на сложное тройное правило, дадим такому ученику решать задачи на простое тройное правило и, исходя из них, наметим систему постепенно усложняющихся задач, последним звеном которой будет задача на сложное тройное правило, решаемая четырьмя действиями.

Если ученик делает в IV классе ошибки в делении многозначных чисел, проверим все те знания и навыки, которые входят в качестве элементов в деление многозначных чисел: знание нумерации — структуры и состава многозначного числа, навыки устного счёта — деление двузначного числа на двузначное, знание таблицы умножения, уменье устно умножать двух- и трёхзначное число на однозначное, понимание смысла каждой отдельной вычислительной операции и др. Обнаружив пробелы, наметим систему упражнений для их ликвидации и проведём эти упражнения. В результате этого ошибки в делении многозначных чисел будут ликвидированы.

В системе занятий с отстающими большое значение имеет широкое использование наглядных пособий, применение графических иллюстраций, упражнения в составлении своих задач, упражнения в узнавании задач данного типа среди других задач, помещённых в задачнике.

ТЕТРАДЬ ПО АРИФМЕТИКЕ

Тетрадь по арифметике должна быть использована не только в образовательных, но и в воспитательных целях. Правильное ведение тетради способствует воспитанию у детей привычки к чистоте и опрятности, к точности и аккуратности.

С первых дней работы по арифметике надо учить ученика правильному ведению тетради и неослабно следить за этим на протяжении всего срока обучения, добиваясь того, чтобы каждая ученическая тетрадь была действительно образцом чистоты и порядка.

В I классе, когда ученик ещё не умеет писать, пусть учитель сам надпишет тетрадь ученика чётким и красивым почерком, а в дальнейшем, начиная по крайней мере со II класса, пусть всегда требует, чтобы ученик сам правильно, грамотно и чётко надписывал свою тетрадь по установленному образцу, например:

Тетрадь по арифметике ученика III класса школы № 5 Андрея Васильева.

Ничего, кроме этой краткой, деловой надписи, не должно быть на обложке тетради: ни рисунков, ни каких-либо иных украшений, ни лишних надписей.

Красота тетради создаётся правильным начертанием цифр, организованным и чётким заполнением каждой её страницы, чистотой. Неправильно написанное должно быть аккуратно зачёркнуто. Зачёркивание возможно и допустимо в тетради; на записях ученик учится, и ему свойственно ошибаться. Не нужно только приучать ученика густо замазывать чернилами неправильно написанное, соскабливать ножом, стирать резинкой: это портит тетрадь и делает записи некрасивыми.

Особое внимание надо уделять письму цифр. С первых шагов надо учить правильному начертанию цифр. Начертание цифр должно быть простым, чётким, законченным, без лишних завитков и украшений. Цифры пишутся с наклоном, как и буквы (см. стр. 158, 159 и 160).

В I классе цифры пишутся в две клетки, во II — в одну клетку, в III и IV — немного меньше, чем в одну клетку. Наименования при цифрах пишутся в полклетки; в I классе — в клетку. При записи чисел надо придерживаться правила: «Каждой цифре своя клетка»; соблюдение этого простого правила приводит к симметрии и чёткости в написании и расстановке цифр. Цифры в тексте задачи пишутся немного выше клетки.

Записи на странице должны располагаться симметрично, не густо, но и без оставления пустых мест.

Каждый новый раздел должен начинаться его заглавием. Работа каждого дня должна датироваться с указанием, какая это работа — классная или домашняя. При решении задачи, если она взята из принятого в классе задачника, указывается номер, например: «Задача № 38».

Тетради должны просматриваться учителем регулярно, по возможности, ежедневно. Поэтому целесообразно иметь каждому ученику две тетради (тетрадь № 1 и тетрадь № 2) с тем, чтобы ученик, сдав учителю для проверки одну тетрадь, мог бы иметь на руках другую тетрадь для выполнения домашнего задания. Для контрольных работ нужно иметь особую тетрадь, в которой выполняются только контрольные работы и которая всегда находится у учителя.

Если ученик плохо ведёт тетрадь, то нужно действовать на него показом хороших образцов. Если, допустим, ученик плохо пишет цифры, надо, просматривая тетрадь и исправляя ошибки, сделать замечание: «Пиши цифры лучше», и тут же написать цифры для примера, а потом заставить ученика написать несколько раз эти цифры по данному образцу. Если ученик плохо записывает действия или неумело, несимметрично располагает их на странице, то и в таких случаях надо действовать показом: написать пример. Иногда полезно написать даже целую страничку для показа всему классу. Все записи и замечания учителя в тетради должны, в свою очередь, делаться аккуратно, ибо всякая запись учителя является образцом, которому ученик подражает.

ИСПРАВЛЕНИЕ ОШИБОК.

Одной из важных сторон воспитательной работы по арифметике является выработка у детей *чувства ответственности* за то, что они утверждают; в этом отношении вычислительная работа, как и решение задач, является весьма ценной. Получив ответ, учащийся должен быть уверен в его правильности, а для этого он должен приобрести навык в проверке (в «самопроверке»). Как правило, надо требовать двукратного выполнения каждого вычисления, причём второе вычисление во многих случаях желательно проводить каким-либо иным способом, чем первое.

Если проверка, сделанная самим учеником или учителем, покажет на наличие ошибки, то ученику надо уметь прежде всего найти эту ошибку. Учителю не надо спешить с указанием места ошибки и тем более с подсказом готового ответа. Гораздо важнее научить ученика самостоятельно находить ошибку. Поэтому, исправляя тетради, учителю достаточно во многих случаях только подчеркнуть ошибочный результат, а ученик должен найти ошибку и исправить её. Например, ученик II класса, решая пример 39+28, получил в ответе 66. Учителю в таком случае нужно подчеркнуть этот ответ и заставить ученика перерешить этот пример, найти ошибку и исправить её.

Но бывают случаи, когда самостоятельное нахождение и исправление ошибки для ученика трудно. Например, ученик IV класса, решая пример на деление 24 472 : 437, получил неверное частное (551 вместо 56) вследствие того, что взял неверную вторую

цифру в частном (5 вместо 6) и получил остаток, равный делителю. Очевидно, что ученик в данном случае недостаточно понял механизм письменного деления. Самостоятельно разобраться в этой ошибке ученику трудно. Поэтому учитель поступит правильно, если он подчеркнёт не только неверный ответ, но и неверный остаток — 437. Можно сделать и ещё большее: дать тут же верное решение и написать: «Остаток всегда должен быть меньше делителя».

```
_24472 | 437
 2185   551 ←→ ошибка!
_ 2622
  2185
_  437 ←→ ошибка!
   437
     0.
```

Правильное решение:

```
_24472 | 437
 2185   56
_ 2622
  2622
     0.
```

Правильное решение послужит для ученика образцом, по которому он должен, по заданию учителя, прорешать несколько аналогичных примеров.

При исправлении ошибки в примерах ученик должен все поправки делать аккуратно, неверные цифры зачёркивать и сверху записывать верные. Никогда нельзя писать по написанным цифрам.

Сложнее обстоит дело с исправлением ошибок при решении задач. Там встречается целый комплекс ошибок, имеющих разные причины: ошибки мышления или ошибки логического порядка, ошибки в вычислениях, ошибки стилистического характера при записи вопросов и объяснения и, наконец, ошибки случайного характера — от рассеянности и невнимания. Каждый вид ошибок требует особого к себе подхода, особых приёмов исправления.

Логические ошибки находят своё выражение в неправильной постановке вопросов, в неправильной или неточной их формулировке. Если весь план неправильно составлен, то такая работа не поддаётся исправлению: её нужно перечеркнуть, а в классе подробно объяснить ученику, как решается данная задача, и заставить его решить эту задачу заново. Если в работе неправильно сформулированы только некоторые отдельные вопросы, то эти вопросы исправляются учителем; учитель зачёркивает ошибочно сформулированный вопрос и надписывает вопрос в правильной редакции.

Если допущена ошибка в вычислениях, то эта ошибка подчёркивается учителем и ученик сам исправляет её. Если ошибка в вычислениях допущена в начале или в середине работы, но работа доведена до конца и привела к неправильному ответу, то достаточно подчеркнуть только первое неправильное вычисление и ответ; ученик же в таком случае должен перерешать дома всю задачу.

Ошибки стилистического характера также исправляются учителем. Каждая ошибка, исправленная учителем или только подчёркнутая им, внимательно просматривается учеником, и ученик, как правило, переписывает неверно решённую задачу в исправленном виде. Если ученик не работает над ошибкой, то работа учителя по исправлению ошибок проходит впустую; одна и та же ошибка повторяется долго, искореняется медленно. Чтобы ошибка не повторялась, ученик должен её продумать, глубже понять и осознать данный вопрос, или, если ошибка допущена вследствие недостатка навыка, проделать ещё и ещё раз упражнение в данном навыке.

«Борясь с ошибками, надо учитывать индивидуальные особенности детей: одни дети тяжело переживают ошибку, как несчастье, другие легко относятся к допущенной ошибке. Одни перед сдачей тетради пересчитывают каждый пример по нескольку раз, другие довольствуются только общим впечатлением от своей работы. Ясно, что отношение учителя к таким ученикам должно быть различное: одних надо ободрить, других, наоборот, заставлять искать свою ошибку, проделывать систематические упражнения в проверке ошибок.

Одни дети быстро реагируют на ошибки, другие — медленно. Одному достаточно только послушать анализ чужой ошибки, чтобы не допустить её у себя, а для другого требуются, кроме классного анализа, ещё индивидуальные разъяснения, специальные упражнения, чтобы покончить с ошибками. Работая с классом, учитель должен не упускать из виду эти особенности каждого ученика, приспосабливаясь к ним, использовать сильные стороны каждого учащегося, чтобы, опираясь на них, поднимать весь класс на более высокий уровень» (Н. А. Менчинская).

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ В ДВУХКОМПЛЕКТНЫХ ШКОЛАХ.

В двухкомплектных школах один учитель занимается с двумя классами. В течение одного учебного часа (45 мин.) он по существу даёт два урока, ведя их одновременно в двух классах, размещённых в одной комнате. Это намного усложняет работу учителя. В двухкомплектной школе учителю особенно важно иметь хорошие организаторские способности, уменье хорошо составить расписание, тщательно разработать план урока, удачно разрешать вопрос о самостоятельной работе учащихся, которая в этих условиях приобретает исключительно важное значение.

Арифметика, требующая от детей глубокого внимания и большого напряжения сил, должна стоять в расписании на первом или

втором уроке. Уроки арифметики в двухкомплектной школе можно спаривать с любым учебным предметом, за исключением физкультуры и пения, которые требуют к себе внимания учителя в течение всего урока и могут мешать ведению урока по арифметике. Можно в обоих классах ставить одновременно уроки арифметики, можно урок арифметики в одном классе сочетать с уроком русского языка или каким-либо иным предметом в другом классе и т. д. На практике чаще всего арифметика проводится одновременно в обоих классах, с которыми занимается один учитель.

Планирование на четверть и планирование темы производятся по той же форме, как и в школах, где учитель занимается с одним классом. Но планирование урока в двухкомплектной школе имеет свои особенности. Существенной особенностью уроков в двухкомплектной школе, по сравнению с уроками четырёхкомплектной школы, является то, что на каждом из них ученикам даётся самостоятельная работа.

Общая схема плана урока с двумя классами может быть представлена в следующем виде:

1. Небольшое задание для самостоятельной работы тому классу, с которым учитель намечает в первую очередь провести непосредственные занятия.

2. Задание другому классу или для продолжения упражнений предыдущего урока, или для выполнения ранее подготовленной самостоятельной работы.

3. Проверка самостоятельной работы в том классе, где учитель начинал урок. Объяснение нового материала в этом классе или проведение учащимися упражнений под непосредственным руководством учителя. В том и другом случае непосредственная работа учителя заканчивается заданием учащимся для самостоятельной работы в классе и дома.

4. Переход к тому классу, в котором самостоятельная работа учащихся была рассчитана на тот же срок, что и непосредственная работа учителя в предыдущем классе.

Занятия учителя в данном классе заключаются: или в беглом просмотре самостоятельной работы и указаниях учащимся для дальнейшего её продолжения, или в объяснении нового материала, требующего небольшого количества времени (10—15 минут), с последующим заданием для самостоятельной работы в классе и дома, или в упражнениях учащихся с дальнейшим переходом их к самостоятельной работе.

Чередование работы учителя с самостоятельной работой детей зависит в значительной мере от тех ближайших задач, которые ставит учитель перед проводимыми уроками в каждом классе. Таких задач может быть три: объяснение нового материала, закрепление полученных знаний и навыков, проверка усвоения. Эти задачи могут различным образом комбинироваться, и в зависимости от этого решается вопрос о чередовании самостоятельных занятий учащихся с занятиями под руководством учителя.

План урока, на котором в одном классе даётся объяснение нового материала, а в другом — закрепление пройденного.

II класс

Арифметика.

Тема. Умножение однозначного числа на двузначное.

I. Учитель объясняет задание для самостоятельной работы: проверить решение примеров, заданных на дом, путём сличения с написанными на доске ответами; после проверки решить задачу (3 мин.).

II. Самостоятельное выполнение задания, данного учителем (12 мин.).

III. Работа с учителем (20 мин.).

1. Проверка работы, выполненной в классе, и домашнего задания.

2. Устный счёт.

3. Объяснение нового материала.

4. Задание для домашней и самостоятельной работы.

IV. Самостоятельное выполнение задания, данного учителем (10 мин.).

III класс

Арифметика.

Тема. Закрепление деления многозначных чисел на трёхзначное.

I. Самостоятельная запись даты и подготовка к проверке домашней работы (3 мин.).

II. Работа с учителем (12 мин.).

1. Проверка домашней работы.

2. Устный счёт.

3. Разбор задачи для самостоятельного решения.

III. Самостоятельное решение разобранной задачи и другой, аналогичной ей, без разбора и нескольких примеров (20 мин.).

IV. Работа с учителем (10 мин.).

1. Проверка самостоятельной работы.

2. Упражнение в решении примеров на умножение и деление с повторением названия чисел в этих действиях.

3. Задание на дом.

План урока, на котором даётся объяснение нового материала в обоих классах.

II класс

Арифметика.

Тема. Деление двузначного числа на однозначное.

I. Учитель объясняет задание для самостоятельной работы (3 мин.).

III класс

Арифметика.

Тема. Деление многозначного числа на однозначное.

I. Самостоятельная запись даты и темы урока (3 мин.).

II. Самостоятельное решение задачи и примеров, написанных на доске (17 мин.).

III. Работа с учителем (20 мин.).

1. Проверка самостоятельной работы.

2. Объяснение нового материала и первые упражнения.

3. Объяснение задания на дом.

4. Разбор задачи для самостоятельного решения.

IV. Самостоятельная запись решения разобранной задачи (5 мин.).

II. Работа с учителем (17 мин.).

1. Проверка домашнего задания.

2 Объяснение нового материала.

3 Упражнение учащихся под руководством учителя.

4. Объяснение задачи для самостоятельной работы.

III. Самостоятельное решение примеров и задачи (20 мин.).

IV. Работа с учителем (5 мин.).

1. Проверка самостоятельной работы.

2. Задание на дом.

План урока при одновременном занятии во II и IV классах.

II класс

Арифметика.

Тема. Умножение на однозначное число.

1. Работа с учителем (20 мин.).

а) Проверка домашней работы: решение задач № 610 и № 611.

б) Объяснение учителем приёма умножения двузначного числа на однозначное.

$23 \times 3 =$	$25 \times 2 =$
$20 \times 3 = 60$	$20 \times 2 = 40$
$3 \times 3 = 9$	$5 \times 2 = 10$
$60 + 9 = 69$	$40 + 10 = 50$

в) Повторение учащимися объяснения учителя при решении примеров:

$16 \times 2 =$ $14 \times 4 =$

г) Формулировка правила умножения на однозначное число.

IV класс

Русский язык — развитие речи.

Тема. Словарная работа с прилагательными по картине Ковальского «В зимнюю ночь».

1. Самостоятельная работа (20 мин.).

а) Рассматривание картины.

б) Составление устного рассказа по картине по следующим вопросам:

1. Какое время года изображено на картине?

2. Кого вы видите на картине?

3. Какой вид у волка?

4. Зачем он сюда пришёл? и т. д.

д) Задание для самостоятельной работы:

решить второй столбик примеров из упражнения № 612 и продумать решение задачи № 614.

2. Самостоятельная работа (15 мин.).

Решение примеров № 612. Чтение про себя задачи № 614. Продумывание задачи.

3. Работа с учителем (10 мин.).

Проверка выполненной работы. Решение примеров с объяснением. Рассказ, как надо решить задачу № 614. Задание: записать решение этой задачи.

4. Задание на дом: решить задачу № 620 и решить один столбик примеров из упражнения № 618.

2. Работа с учителем (15 мин.).

Устные ответы учащихся на поставленные вопросы. Составление из ответов связного рассказа.

Задание для самостоятельной работы: выписать слева опорные слова *ночь, снег, волк, огонёк*, а справа — придуманные к ним прилагательные.

3. Самостоятельная работа (10 мин.).

Выполнение задания: подбор прилагательных к данным опорным словам. Запись предложения.

4. Задание на дом: написать дома составленный по картине рассказ.

Виды самостоятельных работ в двухкомплектной школе те же, что и в других типах школ. Но здесь особое значение имеют те самостоятельные работы, в которых обеспечен самоконтроль.

Приведём образцы таких работ.

1. Решите примеры:

$$\begin{array}{r} 12:4= \ldots \\ 18:6= \ldots \\ 32-8= \ldots \\ 6\times 7= \ldots \\ 16+9= \ldots \\ \hline 97 \end{array}$$

Найдите ответы; потом сложите их. Если в сумме получится число 97, примеры решены верно.

2. Решите примеры:

19 + 7; 24 + 26; 2 × 12; 26 : 13; 50 — 31

и расположите их в таком порядке, чтобы каждый следующий пример начинался таким числом, каким предыдущий пример оканчивается.

Первое число в первом примере и ответ в последнем примере должны быть одинаковы.

3. П р о д о л ж а й т е   э т и   р я д ы:

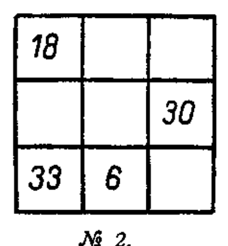
2, 5, 8, 11 . . . . до 98
3, 7, 11, 15 . . . . до 103
2, 4, 8, 16 . . . . до 1024.

4. Составьте примеры на умножение двух чисел, чтобы в результате в каждом примере получилось число 72. Таких примеров должно быть всего 12.

5. Заполните пустующие клетки квадратов № 1 (сумма = 75) № 2 (сумма = 63).

	5	30
	25	
20		

№ 1.



№ 2.

Рис. 10.

6. Р е ш и т е   п р и м е р: 129 046 : 87 и проверьте результат умножением.

7. Решите пример: $\begin{array}{r} -\,100\,100 \\ 97\,126 \\ \hline \end{array}$ и проверьте результат сложением.

Самостоятельные работы в связи с решённой задачей: «В двух мешках 96 *кг* картофеля. В одном на 2 *кг* больше, чем в другом. Сколько картофеля в каждом мешке?»

1. Проверьте результат решения.
2. Решите эту задачу вторым способом.
3. Запишите решение числовой формулой.
4. Придумайте похожую задачу.
5. Найдите на стр. ... задачника похожие задачи.
6. Решите эту задачу с письменными вопросами.
7. Замените в условии задачи выражение «на 2 *кг* больше» выражением «в 2 раза больше» и решите задачу.

При проверке самостоятельной работы нужно требовать от учеников объяснения способов и приёмов решения примеров и задач. Тут дети воспроизводят те рассуждения, которыми пользовались при решении задач, те правила, на основании которых решали примеры. Это будет способствовать развитию речи учащихся, обогащению её арифметическими терминами и уточнению математических понятий.

Удельный вес самостоятельной работы по арифметике в двухкомплектных школах весьма значителен. От постановки их в большой мере зависят результаты всей работы. Поэтому к проведению их нужно готовиться столь же тщательно, как и к непосредственным занятиям с классом.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

В преподавании арифметики большое место занимает решение задач. На этот раздел отводится около половины всего того количества часов, которое полагается на арифметику по учебному плану. Успехи в обучении арифметике расцениваются главным образом по уменью учащихся решать задачи. Такая высокая оценка уменья решать задачи объясняется большим значением этого вида математической работы.

Имея огромное воспитательное значение, решение задач оказывает большое влияние на умственное развитие детей, на развитие их мышления, внимания, воображения.

Решение задач имеет большое практическое значение: оно вооружает ученика уменьем производить различного рода расчёты, часто встречающиеся в жизни.

На задачах выясняются и конкретизируются многие математические понятия; например, понятие о кратном и разностном сравнении чисел, два вида деления, нахождение части числа и числа по его части и многие другие.

Наконец, в решении задач находят своё практическое применение и закрепление вычислительные навыки.

Чем обусловлено уменье решать задачи?

Отвечая на этот вопрос, нужно сказать, что для успешного решения задач от учащихся требуется известный уровень умственного развития, сообразительность, уменье рассуждать, делать хотя бы простейшие умозаключения, требуется внимание и настойчивость в преодолении трудностей, более или менее развитое воображение. Но называя эти условия, нужно всегда помнить, что решение задач, в свою очередь, является самым мощным, самым действенным средством их развития. Цель и средства здесь своеобразно переплетаются между собой.

Далее, уменье решать задачи зависит от понимания учащимся связи и зависимости между теми величинами, которые даются в условии задачи. Если ученик, приступая к решению задачи, сумел определить, какую величину можно найти по двум данным величинам и какие две величины надо иметь в качестве данных, чтобы найти искомую величину, то задача уже наполовину им решена. Особенно ясно должен представлять себе ученик зависимость между теми величинами, которые чаще всего встречаются в задачах: зависимость между ценой, стоимостью и количеством; между скоростью, расстоянием и временем; между нормой выработки, общей продукцией труда и временем и др.

Установив зависимость между величинами, ученик должен произвести арифметические действия над числовыми значениями этих величин. Для этого он должен знать, в каких случаях применяется каждое действие. Мир задач обширен и разнообразен, но всё это бесконечное разнообразие задач решается при помощи

только ... четырёх арифметических действий. Это происходит потому, что каждое действие богато арифметическим содержанием и применимо в разных случаях; в каких — это учащийся должен знать твёрдо, ибо от этого зависит правильность решения задачи.

Правильно выбрав действия, ученик должен уметь правильно произвести вычисления. Неправильные вычисления приводят к невозможности решения задачи или к неправильному ответу.

Наконец, для уменья решать типовые задачи нужно, кроме вышеуказанного, знать ещё те особые способы, при помощи которых решается каждый данный тип задачи.

Таковы главнейшие предпосылки успешного решения задач. Они создаются прежде всего на решении простых задач.

ПРОСТЫЕ ЗАДАЧИ.

Все задачи можно разделить на простые и составные.

Простыми задачами называются такие, которые решаются одним действием. На решении простых задач ученик уясняет, что такое задача и каковы её элементы (условие, числовые данные, вопрос). На решении этих задач ученик учится понимать зависимости между величинами и правильно применять каждое арифметическое действие.

Основными видами простых задач являются следующие задачи.

На сложение.

1. Задачи на нахождение суммы двух или нескольких слагаемых, например: «У Вани было 5 яблок, да ему ещё дали 4 яблока. Сколько всего яблок стало у Вани?»

2. Задачи на увеличение числа на несколько единиц; например: «В одном кувшине 3 литра молока, а в другом на 2 литра больше. Сколько литров молока в другом кувшине?»

На вычитание.

1. Задачи на нахождение остатка, например: «У мальчика было 5 карандашей, 2 из них он исписал. Сколько карандашей осталось у мальчика?»

2. Задачи на уменьшение числа на несколько единиц; например: «В одной коробке 10 перьев, а в другой на 4 меньше. Сколько перьев в другой коробке?»

3. Задачи на нахождение разности двух чисел; например: «Длина комнаты 6 *м*, а ширина 4 *м*. На сколько длина комнаты больше, чем ширина?»

На умножение.

1. Задачи, в которых данное число нужно повторить слагаемым несколько раз; например: «Куплено 5 тетрадей по 10 коп. каждая. Сколько стоят все тетради?»

2. Задачи на увеличение числа в несколько раз; например: «Лошадь пробежала в час 10 *км*, а автомобиль в 6 раз больше. Сколько километров прошёл автомобиль в час?»

На деление.

С делением на равные части связаны три вида простых задач:

1. Задачи, в которых требуется данное число разделить на несколько равных частей; например: «Мальчик разложил 16 карандашей поровну в 2 коробки. Сколько карандашей получилось в каждой коробке?»

2. Задачи на уменьшение числа в несколько раз: «В одном куске 8 *м* ситца, а в другом в 2 раза меньше. Сколько метров в другом куске?»

3. Задачи на нахождение части числа; например: «На участке 20 деревьев: четвёртую часть всех деревьев составляют берёзы. Сколько берёз на участке?»

С делением по содержанию связаны два вида простых задач:

1. Задачи, в которых требуется узнать, сколько раз одно число содержится в другом данном числе; например: «Девочка купила перьев на 15 коп. Каждое перо стоило 3 коп. Сколько перьев купила девочка?» (очевидно, столько перьев, сколько раз 3 коп. содержатся в 15 коп.).

2. Задачи, в которых требуется узнать, во сколько раз одно число больше или меньше другого, т. е. задачи на кратное сравнение чисел; например: «Книга стоит 50 коп., а тетрадь 10 коп. Во сколько раз книга дороже тетради?»

Кроме того, существует 4 вида простых задач на сложение и вычитание, которые следует рассматривать как обратные по отношению к выше приведённым задачам. Так, задаче на нахождение суммы двух данных слагаемых ($5+4=x$) соответствуют обратные задачи, в которых по данной сумме двух слагаемых и одному из них ($x+4=9$; $5+x=9$) отыскивается другое слагаемое. Например: У девочки было 5 орехов. Ей дали ещё несколько орехов; после этого у неё стало всего 9 орехов. Сколько орехов дали девочке?

Задаче на вычитание, в которой находится остаток, соответствуют две обратных задачи: а) в одной из них по данному вычитаемому и остатку отыскивается уменьшаемое (например: «Мальчик уплатил 18 коп. за карандаш. После этого у него осталось 32 коп. Сколько денег было у мальчика?») и б) в другой по данному уменьшаемому и остатку отыскивается вычитаемое (например: «Миша купил 20 морковок. Когда несколько морковок он дал кроликам, у него осталось 8 морковок. Сколько морковок Миша дал кроликам?»).

Следует также различать 4 вида простых задач, в тексте которых даются косвенные указания на применение арифме-

тических действий. Таковы задачи: 1) На косвенное сложение; например: «Карандаш стоит 20 коп.; и это на 10 коп. дешевле, чем ручка. Сколько стоит ручка?»

2) На косвенное вычитание, например: «Экскурсанты прошли в первый день 16 *км*; и это на 4 *км* больше, чем они прошли во второй день. Сколько километров прошли экскурсанты во второй день?»

3) На косвенное умножение, например: «В контрольном диктанте за третью четверть все учащиеся класса сделали 18 ошибок; это в 2 раза меньше, чем за вторую четверть. Сколько ошибок сделано в контрольном диктанте за вторую четверть?»

4) На косвенное деление: «Карандаш стоит 18 копеек; это в 3 раза дороже, чем перо. Сколько стоит перо?»

Мы рассмотрели простые задачи, с которых начинается обучение детей решению задач и которые решаются по преимуществу в I и II классах. Но перечень простых задач этими задачами не исчерпывается. Есть ещё ряд простых задач с более сложными зависимостями между данными, которые решаются по преимуществу в III и IV классах. Перечислим некоторые из этих задач.

1. Нахождение числа по данной одной его части: «Четверть килограмма масла стоит 10 руб. Сколько стоит килограмм масла?»

2. Задачи на изменение результатов в зависимости от изменения данных: «На трамвайной остановке вышло из трамвая 8 человек, а вошло 15 человек. Сколько пассажиров прибавилось в трамвае?»

«У двух мальчиков было денег поровну. Один из них израсходовал 70 коп., а другой — 90 коп. У кого из них осталось денег больше и на сколько больше?» И т. д.

3. Задачи на нахождение разности: «Если из одного бумажника переложить в другой 20 руб., то в обоих бумажниках денег станет поровну. На сколько рублей больше в одном бумажнике, чем в другом?»

4. Задачи на нахождение числа по двум данным разностям: «Один ученик купил больше другого на 2 карандаша и уплатил за свою покупку на 24 коп. больше. Сколько стоит карандаш?»

Все эти простые задачи в различных сочетаниях входят в составные задачи. И чем лучше овладевают дети решением простых задач, тем легче им будет решать составные задачи.

Первые шаги в обучении детей решению простых задач.

Ребёнок, только что поступивший в школу, ещё никогда не слыхал таких слов, как «задача», «решение задачи», «условие задачи», «вопрос задачи», «ответ». Эти термины надо постепенно ввести в речь школьника и научить его относиться к ним сознательно. Сама задача должна прийти к ребёнку не как нечто надуманное и навязанное извне, а как задание, выросшее на глазах у ребёнка из окружающей его обстановки, а ещё лучше — из его потребностей. Решение задачи должно быть впервые воспринято ребёнком как решение самых жизненных практических вопросов. «Задача — часть жизни; кто умеет решать задачи, тот умеет про-

изводить расчёты, с которыми можно столкнуться каждую минуту в жизни». Такие взгляды на задачу должны быть внушены ученику, впервые приступающему к решению задач. Для этого на первых уроках учитель предлагает детям задачи-действия:

«На столе стоят 2 чернильницы. Возьмём из шкафа и поставим на стол ещё одну чернильницу. Сколько чернильниц теперь стало на столе?»

«На стене висит 5 картин. Повесим ещё одну. Сколько теперь картин стало на стене?»

«На двух передних партах сидят 4 ученика. Ваня, встань и пойди к доске. Сосчитайте, сколько теперь учеников осталось сидеть на двух партах?»

Слова здесь сопровождаются действиями: прибиванием картин, выниманием из шкафа и переносом чернильницы, подсчётом книг в сумке, раздачей ученикам письменных принадлежностей, выходом из-за парты учеников и т. д.

Чтобы задачу решить, надо её понять, а понять задачу в одно действие — это значит прежде всего найти связь между вопросом задачи и её данными. Но для того, чтобы ребёнок мог связать данные и вопрос, он должен сначала их расчленить, он должен уметь различать условие задачи и вопрос задачи. Дети вначале не различают этих понятий.

Общеизвестен такой факт. Учитель предлагает ученикам задачу: «У мальчика было 2 тетради. Папа дал ему ещё 2 тетради. Сколько всего тетрадей стало у мальчика?» Получив от учителя задание повторить условие задачи, ученик говорит так: «У мальчика было 2 тетради. Папа дал ему ещё 2 тетради. У него стало 4 тетради». В этом ответе ученик слил условие задачи и вопрос, повторение задачи и её решение.

Первые занятия по решению задач должны быть направлены на выработку у детей понимания того, что задача состоит из условия и вопроса; повторить задачу — это значит сказать и условие, и вопрос; решить задачу — это значит произвести действие: прибавить или отнять; полученное число есть ответ задачи. Всё это достигается путём решения задач.

Приведём один из образцов решения задачи (описанный Н. С. Поповой).

Учительница прикрепляет к доске плакат с изображением большой и маленькой тарелки. На глазах у детей она раскладывает на тарелки «яблоки» (вырезанные из картона, втыкая их в соответствующие надрезы), при этом она вслух считает яблоки так, чтобы дети могли потом сказать: «На большую тарелку положено 5 яблок, а на маленькую 3 яблока».

После этого учительница предупреждает: «Сейчас я скажу вам задачу. Вы должны её прослушать и повторить слово в слово. А уже после этого мы будем её решать».

Внятно, с необходимыми логическими ударениями, учительница говорит:

«На стол поставили две тарелки, большую и маленькую. На большую тарелку положили 5 яблок, а на маленькую 3 яблока. Сколько всего яблок положили на обе тарелки?»

После этого повторили задачу сначала один мальчик, потом другой, потом ещё девочка. Повторение давалось нелегко, с наводящими и даже подсказывающими вопросами. Дети учились повторять задачу.

«Что же спрашивается в задаче?» — с особым логическим ударением сказала учительница. Двое детей повторили только вопрос задачи. «Теперь решайте задачу и скажите ответ», — в заключение сказала учительница. Решение оказалось самым лёгким для детей. Через минуту лес вытянутых

детских рук свидетельствовал о том, что задача решена. «Как же вы решили задачу? Что сделали?» — спросила учительница.

«К 5 яблокам прибавили 3 яблока, получилось 8 яблок», — отвечали ученики. После этого оставалось только записать решение, что и сделала учительница на классной доске.

Таким образом, решение простой задачи распадается на следующие моменты:

1. Сообщение учащимся условия задачи.
2. Повторение задачи по наводящим вопросам и без вопросов.
3. Выделение вопроса задачи («Что спрашивается в задаче?»).
4. Решение: выбор действия и вычисления.
5. Формулировка ответа задачи.
6. Запись решения задачи.

Поясним кратко каждый этап решения.

Условие задачи лучше говорить, рассказывать, чем читать по книге; рассказ легче воспринимается детьми, чем чтение. Учитель говорит задачу один-два раза, не спеша, внятно, оттеняя числовые данные. Как правило, запись числовых данных на доске в это время не требуется, так как в задаче даётся обычно два числа, которые запоминаются учениками без особого труда.

Повторяется задача сначала по вопросам. Вопросы нужны не только для того, чтобы легче воспроизвести содержание задачи, но и для того, чтобы помочь ученикам более отчётливо понять структуру задачи, её состав (условие, вопрос).

В заключение задача повторяется одним-двумя учениками без наводящих вопросов. При повторении многие задачи иллюстрируются. Иллюстрации нужны для лучшего понимания содержания задачи, для того, чтобы заставить более живо работать воображение детей. Для иллюстрации используются различного рода наглядные пособия: картины, рисунки, плакаты и др.

После повторения учитель ещё раз останавливает внимание учеников на вопросе задачи («Так что же спрашивается в задаче?»). Вопрос — главное в задаче: им определяется направление мысли учащегося; поэтому вопрос задачи учащиеся должны представлять себе особенно отчётливо.

При решении простой задачи аналитико-синтетический процесс мышления выступает в самой простейшей своей форме; из данных задачи вытекает её вопрос; для решения вопроса задачи необходимы данные. Всё это дано в готовом виде, и ученику остаётся только произвести выбор действия, посредством которого решается вопрос. Выбор действия — это наиболее трудный и вместе с тем центральный вопрос в решении простых задач. Трудность обусловлена тем, что вследствие малых чисел ребёнок часто не видит надобности в выборе действия. Ученик находит ответ на основании знания состава чисел первого десятка.

Например, решается задача: «Карандаш и перо вместе стоят 20 коп.; один карандаш стоит 15 коп. Сколько стоит перо?»

Отвечая на вопрос: «Как вы решили задачу?» — ученик говорит: «15 коп.

да 5 коп. будет 20 коп.». Он знает, что 20 состоит из 15 и 5. Если дано 15, то искомым числом должна быть пятёрка. Значит, перо стоит 5 коп. В данном случае ученик не прибегал к вычитанию.

Чтобы приучить учащихся к выбору действия и облегчить им усвоение того, в каких случаях применяется каждое действие, надо чаще прибегать к наглядным пособиям; надо решение задачи иллюстрировать.

Пусть решается задача: «У Васи было 7 морковок. 4 морковки он дал кроликам утром, а остальные днём. Сколько морковок дал Вася кроликам днём?»

«Покажите на палочках, что у Васи было всего 7 морковок»,— говорит учитель, обращаясь к ученикам. Ученики на своём дидактическом материале откладывают 7 единиц (палочек, кружочков, спичек и т. п.). «Что сделал Вася с этими морковками?» — спрашивает дальше учитель. (Он утром дал кроликам 4 морковки.) «Что же надо сделать с этими 4 морковками?» (Надо их отнять от 7 морковок.) «Отнимите», — говорит учитель. Ученики отсчитывают 4 палочки. «Сколько же морковок у Васи осталось? (3 морковки.) Значит, сколько же морковок дал Вася кроликам днём?» (Вася дал днём кроликам 3 морковки.)

«Повторите всю задачу» — говорит учитель. Вызванный ученик повторяет.

«Как же мы решили задачу? Как мы узнали, что днём Вася дал кроликам 3 морковки?» (Мы от 7 отняли 4, осталось 3.)

Если бы ученики затруднялись дать правильный ответ на этот вопрос, то учителю надо прийти на помощь ученикам и дать правильную формулировку ответа: «От 7 морковок надо отнять 4 морковки».

Примерно со второй-третьей недели занятий после решения задачи надо предлагать ученику вопрос: «Как ты решил задачу?», варьируя этот вопрос так: «Что ты сделал, чтобы найти ответ?» или «Как ты нашёл ответ?» А в дальнейшем, по отношению к некоторым задачам надо ставить вопрос и «почему?» Это относится к задачам на увеличение и уменьшение чисел на несколько единиц. Например, предложив ученикам задачу: «Ручка стоит 8 коп., а тетрадь на 2 копейки дороже. Сколько стоит тетрадь?» — учитель вызывает ученика и ставит перед ним последовательно три вопроса:

1) «Сколько стоит тетрадь?» (Тетрадь стоит 10 коп.)

2) «Как ты узнал, что тетрадь стоит 10 коп.?» (Я к 8 коп. прибавил 2 коп., получил 10 коп.)

3) «Почему ты к 8 прибавил 2?» (Потому что в задаче сказано, что тетрадь стоит на 2 коп. дороже.)

Запись решения задач.

Значительная часть устно решённых задач (примерно около трети) сопровождается записью решения на классной доске и в тетрадях учащихся. Запись способствует более отчётливому пониманию того, какое именно действие применяется при решении данной задачи.

Возникает вопрос: ставить ли при числах наименование? Пока ученики неграмотны или малограмотны (в первом полугодии),

решение задачи записывается без постановки наименований при компонентах.

Но в дальнейшем вопрос о записи наименований решается иначе. В советской начальной школе принято при числах ставить наименования. Постановка наименований требует от ученика более осмысленного отношения к задаче, она заставляет его различать компоненты.

Постановка наименований придаёт записи задачи более наглядный характер, без наименования запись получается отвлечённой, слабо вскрывающей характер и процесс мышления учащихся. А между тем мышление ребёнка — образное, конкретное. В соответствии с этим и запись должна быть образной, конкретной. Поэтому на младших ступенях обучения наименования следует ставить.

Наименования надо писать сокращённо. Этому нужно постоянно учить учеников, так как знания по русскому языку ещё не обеспечивают учащимся этого навыка.

Рассмотрим запись задач на каждое действие.

В *сложении* слагаемые и сумма должны иметь одинаковое наименование. Это приводит к необходимости в некоторых случаях видовые понятия заменять родовыми. Например, решение задачи «Мальчик поймал 8 окуней и 3 ершей. Сколько всего рыб поймал мальчик?» может быть записано так:

8 рыб + 3 рыбы = 11 рыб.

Сложнее обстоит дело с записью решения задач на увеличение числа на несколько единиц. Возьмём задачу: «В классе учится 15 мальчиков, а девочек на 5 больше. Сколько девочек учится в классе?» Слагаемые и сумма должны иметь, как известно, одинаковые наименования. Чтобы удовлетворить этому требованию, решение этой задачи может быть записано так:

15 дев. + 5 дев. = 20 дев.

Эта запись вытекает из следующего рассуждения:

«Девочек в классе на 5 больше, чем мальчиков. Это значит, что девочек было столько, сколько мальчиков, т. е. 15 девочек и сверх этого ещё 5 девочек. Значит, всего в классе было 15 дев.+ +5 дев.».

Одинаковые наименования должны иметь также уменьшаемое, вычитаемое и остаток. Некоторое осложнение получается при записи решения задач на уменьшение числа на несколько единиц. Решение задачи «В классе 32 ученика. Из них 20 девочек, остальные мальчики. Сколько мальчиков в классе?» может быть записано так:

32 уч. — 20 уч. = 12 уч. (мальчиков).

Решение задачи «В стаде 20 коров, а телят на 8 меньше. Сколько телят в стаде?» может быть записано так:

20 гол. — 8 гол. = 12 гол. (телят).

Решение задачи «В цеху работает 20 мужчин и 15 женщин. На сколько мужчин больше, чем женщин?» может быть записано так:

20 чел. — 15 чел. = 5 чел. (мужчин).

Отсюда видно, что постановка наименований при числах в вычитании — дело нелёгкое. Ученику приходится часто пользоваться заменой видовых понятий родовыми и наоборот. Ученики I и II классов могут справиться с этими трудностями только при ближайшей помощи учителя.

В умножении множимое и произведение могут быть числами именованными. Множитель всегда число отвлечённое. Множимое и произведение должны иметь одинаковые наименования. Некоторое осложнение получается в записи решения таких задач, в которых требуется увеличить данное число в несколько раз.

Например, решение задачи «В бригаде работает 5 мужчин, а женщин в 2 раза больше. Сколько женщин работает в бригаде?» нужно записать так: 5 чел.×2=10 чел. (жен.)

О записи решения задач на деление (см. стр. 188).

Повторяем: в записях наименований всегда требуются со стороны учителя прямые указания и помощь учащимся.

Составление задач учащимися.

Упражнения в составлении своих задач нужно проводить в тесной связи с решением готовых задач по задачнику. Система упражнений должна обеспечить постепенное нарастание сложности в этой работе. Примерно может быть намечена следующая система:

1. Составление задач в связи с наблюдениями в классе. Например: «Сколько у нас в классе горшков с цветами на одном подоконнике? Сколько — на другом? Составьте задачу про горшки с цветами!»

2. Составление задач по картинкам. Например: «Рассмотрите картинку, изображающую опушку леса. Сколько грибов растёт под ёлочкой справа? Сколько грибов растёт под левой ёлочкой? Составьте задачу про грибы!»

3. Составление задач на данное действие и с заданными числами. Например: «Придумайте задачу, в которой нужно от 10 руб. отнять 4 рубля!»

4. Составление задач на определённое действие без заданных чисел. Например: «Составьте задачу, в которой надо сложить 3 числа!»

5. Составление похожих (аналогичных) задач. Например: после того как было решено несколько задач на увеличение числа на несколько единиц, учитель предлагает: «Составьте задачу, похожую на те, которые мы решали!»

6. Составление задач определённого вида. Например: «Придумайте задачу, в которой надо одно число уменьшить на несколько единиц».

ПЕРЕХОД ОТ ПРОСТЫХ ЗАДАЧ К СОСТАВНЫМ.

Учащиеся I класса уже в первом полугодии начинают решать задачи в 2 действия, т. е. составные задачи. Новым для детей при решении первых составных задач является план решения: необходимость перед решением задачи установить порядок, последовательность решения.

Чтобы подвести учащихся к мысли о необходимости плана, к пониманию того, что некоторые задачи нельзя решать сразу, одним действием, нужно первые составные задачи сформулировать так, чтобы в условии самой задачи было подчёркнуто два этапа в развитии события, о котором говорится в задаче. Для наглядности решение первых составных задач полезно инсценировать.

Решим задачу: «Девочка, имея на руках 8 коп., хочет купить карандаш. Для этого она пошла к маме и попросила у неё ещё 7 коп. После этого она отправилась в магазин и купила там карандаш за 12 коп. Сколько денег осталось у девочки?»

Для решения задачи вызывается ученица, которая изображает «девочку», имеющую на руках 8 коп. Учительница изображает «маму». Сначала девочка идёт к маме (учительнице) и, получив от неё 7 коп., вычисляет, сколько же у неё получилось денег. Потом она идёт в условленное место («магазин»), покупает там карандаш и, уплатив за него 12 коп., считает, сколько у неё осталось денег. Класс следит за действиями девочки, наблюдает два этапа в развитии этого действия и отвечает на вопросы учителя: «Как была решена задача? Что сначала узнала девочка? (Сколько стало денег, когда мама дала ей 7 коп.) Что потом узнала девочка? (Сколько у неё осталось денег.) Сразу ли, одним ли действием была решена задача?»

Решение задачи записывается, и в этой записи ещё раз подчёркивается последовательность, две ступени в решении этой задачи:

1) 8 коп. + 7 коп. = 15 коп.
2) 15 коп. — 12 коп. = 3 коп.

Указывая на первую строчку, учитель спрашивает, что мы узнали в первом действии.

Указывая на вторую строчку, учитель спрашивает, что мы узнали во втором действии.

После решения трёх таких задач делается обобщение: «До сих пор мы решали задачи сразу, одним действием. А теперь стали решать такие задачи, которые решаются двумя действиями».

Есть ещё другой способ показать учащимся, что сложная задача состоит из простых задач и что такие задачи решаются постепенно, последовательно. Этот способ состоит в следующем:

Ученикам предлагается решить одну за другой две простые задачи, составленные так, что искомое первой задачи входит в качестве данного во вторую задачу.

Например:

1. «Мальчик поймал сначала 12 рыб, потом 6 рыб. Сколько всего рыб поймал мальчик?»

2. «Мальчик поймал 18 рыб, из них 8 рыб сварил. Сколько рыб осталось?»

Решение этих задач записывается на классной доске:

Задача 1-я	Задача 2-я
12 рыб + 6 рыб = 18 рыб	18 рыб — 8 рыб = 10 рыб

После этого учитель говорит: «А теперь из этих двух задач мы составим одну задачу и решим её». Составляется следующая задача: «Мальчик поймал сначала 12 рыб, потом 6 рыб. Из них 8 рыб. сварили. Сколько рыб осталось?»

Учитель. Можем ли мы сразу узнать, сколько рыб осталось?
Ученик. Нет, не можем.
Учитель. Почему?
Ученик. Потому, что нам неизвестно, сколько всего рыб поймал мальчик.
Учитель. А можно ли узнать сразу, сколько всего рыб поймал мальчик?
Ученик. Можно.
Учитель. Так что же надо узнать сначала?
Ученик. Сколько всего рыб поймал мальчик.
Учитель. А потом что нужно узнать?
Ученик. Сколько рыб осталось.

После устного решения задачи на доске появляется запись, которая ещё больше оттеняет последовательность решения сложной задачи:

Задача

1) 12 рыб + 6 рыб = 18 рыб
2) 18 рыб — 8 рыб = 10 рыб

Решаются ещё одна-две аналогичные простые задачи, по которым затем составляются сложные задачи и в конце урока делается обобщение.

Этот способ перехода от простых задач к составным получил в школах широкое распространение. Однако целесообразность его применения сомнительна. Он слабо отвечает той цели, которая ставится перед учителем при решении первой составной задачи: научить ребёнка расчленять составное, сложное на элементы, на простые задачи. Этой цели больше соответствует первый указанный нами приём, когда ученику сразу даётся готовая, составная задача, и всё внимание его сосредоточивается на анализе, на расчленении.

Для первоначального объяснения надо брать такие задачи в два действия, в которых порядок решения совпадает с расположением в условии задачи числовых данных. А дальше надо вводить и такие задачи, где этого совпадения нет. Например. «У мальчика было 15 руб. На эти деньги он купил учебники за 6 руб. и сумку за 3 руб. Сколько денег осталось у мальчика после этой покупки?»

В решении задач в два действия нужна большая и длительная тренировка. На этих задачах дети учатся тому, какую величину можно найти по числовым значениям двух величин и какие данные надо иметь, чтобы найти искомую величину.

СОСТАВНЫЕ ЗАДАЧИ.

Когда учитель решает с учениками более или менее сложную арифметическую задачу, новую по своему содержанию или трудную для них в том или ином отношении, то он обязательно проводит учеников через следующие четыре этапа:

1. Знакомство с условием задачи.
2. Разбор задачи.
3. Составление плана решения.
4. Решение (вычисления).

Каждый из этих этапов имеет своё значение и свою методику.

Знакомство с условием задачи.

Ознакомиться с условием задачи — это значит ясно представлять себе фактическую сторону задачи — её фабулу, или сюжет, это значит знать, какие величины даны в задаче, какая величина является искомой и какими числами выражены эти величины.

Всё это достигается следующими простыми средствами. Учитель читает условие задачи или, что ещё лучше, говорит его наизусть; последнее особенно важно в младших классах. Иногда учитель заставляет учеников читать задачу; при этом надо учить их читать условие задачи медленно, с остановками на точках, со смыслом («Когда читаешь, старайся мысленно представить себе то, о чём читаешь»). Вопрос задачи надо читать два-три раза. Да и всё условие задачи, если оно более или менее сложно, надо читать два раза. Полезно практиковать в классе чтение задачи про себя. После первого чтения нужно пояснить непонятные или малопонятные термины, если они встречаются в тексте задачи. Заучивать условие задачи на память не рекомендуется.

При втором чтении условие задачи записывается на классной доске; записывает его или сам учитель (в младших классах), или ученик под диктовку учителя. Записываются только числовые данные с сокращёнными наименованиями в строчку, в том порядке, в каком числа даны в задаче.

Но записи можно придать, если позволяет структура задачи, форму схемы. Схема способствует лучшему пониманию задачи. Пусть, например, решается задача:

«Коллектив огородников собрал с 15 гряд по 80 *кг* картофеля и с 25 гряд по 60 *кг* картофеля с каждой гряды. Весь собранный картофель разложили в мешки по 50 *кг* в каждый мешок. Сколько мешков для этого понадобилось?»

Запишем кратко условие этой задачи в строчку:

15 гр. по 80 *кг*; 25 гр. по 60 *кг*; 50 *кг*?

Записи условия можно придать форму схемы:

Собрали:	Разложили:	
С 15 гр. по 80 *кг* С 25 гр. по 60 *кг*	по 50 *кг*	Сколько понадобилось мешков?

Первая запись короче, проще, вторая — сложнее, подробнее — по ней легче повторить задачу и легче её решать.

Первую ученик может сделать самостоятельно, вторая может быть сделана или самим учителем, или учеником с помощью учителя.

При составлении схемы ученик производит расчленение условия, сопоставляет числовые данные между собой, иначе говоря, в связи с записью он частично анализирует задачу. Этот анализ углубляет понимание текста, конкретизирует содержание задачи и в значительной мере облегчает последующий разбор задачи.

По сделанной записи условие задачи повторяется двумя-тремя учениками, в зависимости от его сложности. В младших классах идёт повторение сначала по наводящим вопросам, потом — повторение в целом. Чтобы удостовериться в том, что ученики действительно усвоили условие задачи, нужно в заключение спросить, что означает каждое данное число.

Для усвоения условия некоторых задач полезно прибегать к наглядным пособиям, к иллюстрированию текста задачи рисунком, чертежом, картинкой. Наглядность заставляет живее работать воображение учащихся. Она помогает установить правильные отношения между данными в задаче величинами, помогает найти способ решения задачи.

К иллюстрациям нужно чаще прибегать в I и II классах, где ведётся большая работа над тем, чтобы дети при слушании или при чтении текста ясно представляли себе предметы или процессы, о которых идёт речь в задаче.

Разбор задачи.

После того как условие задачи усвоено, учитель переходит к разбору задачи.

Цель разбора состоит в том, чтобы выяснить, в какой связи и зависимости находятся между собой данные в задаче величины и искомая величина от данных, и на основании этого расчленить сложную задачу на ряд простых, последовательное решение которых приводит к решению главного вопроса задачи.

Разбор — центральный момент в объяснении задачи; на этом этапе и происходит главным образом обучение решению задач.

В чём заключается сущность разбора задачи?

Подвергая задачу разбору, отыскивая пути её решения, ученик мыслит, рассуждает. При этом он пользуется анализом и синтезом (как исходными логическими операциями, на которых основываются рассуждения). Под анализом при разборе задачи подразумевается такой процесс мышления, который идёт от вопроса задачи к числовым данным, нужным для его решения. Под синтезом подразумевается такой процесс мышления, который идёт от числовых данных к вытекающему из них вопросу.

Проиллюстрируем каждый из этих процессов на примере разбора задачи: «Коллектив огородников собрал...» (см. стр. 85).

А. Будем исходить от числовых данных и пользоваться синтезом. Тогда рассуждение примет следующую форму: «Огородники собрали картофель с 15 гряд по 80 *кг* с каждой гряды. На основании этих данных можно узнать, сколько килограммов картофеля собрали огородники с 15 гряд.

Огородники собрали ещё с 25 гряд по 60 *кг* картофеля. На основании этих данных можно узнать, сколько килограммов картофеля огородники собрали со второго участка.

Зная количество картофеля, собранного с каждого участка в отдельности, можно узнать, сколько всего картофеля собрали огородники с двух участков.

Далее. Весь собранный картофель разложили в мешки по 50 *кг* в каждый. Зная, сколько всего было картофеля и сколько килограммов клали в один мешок, можно узнать, сколько потребовалось мешков, т. е. получить ответ на вопрос задачи.

Значит, план решения задачи будет следующий...»

Б. Будем исходить из вопроса задачи и пользоваться анализом. Тогда рассуждение примет следующую форму:

«В задаче спрашивается, сколько мешков понадобилось для размещения картофеля.

Чтобы ответить на этот вопрос, надо знать, сколько было всего картофеля и сколько картофеля укладывали в один мешок; мешков понадобится столько, сколько раз 50 *кг* повторится в общем количестве картофеля. Из этих данных, которые нам нужны, известно, что в один мешок укладывали 50 *кг*. Неизвестно, сколько всего собрали картофеля. А чтобы ответить на вопрос: «Сколько всего собрали картофеля?», надо знать, сколько картофеля собрали с первого участка и сколько собрали со второго участка в отдельности. Ни то, ни другое в задаче не дано. Чтобы узнать, сколько картофеля собрали с первого участка и сколько картофеля собрали со второго участка, надо знать, сколько было гряд на каждом участке и сколько килограммов собирали с одной гряды на каждом участке. Это в условии задачи дано: в задаче сказано, что на первом участке было 15 гряд и с каждой гряды собрали по 80 *кг*. На втором участке было 25 гряд и с каждой гряды собрали по 60 *кг*.

Значит, план решения задачи будет таков...»

Мы показали анализ и синтез в их «чистом» виде, обособлен-

ными, чтобы яснее охарактеризовать сущность каждого из них. Но в действительности разбор задачи есть процесс аналитико-синтетический, в котором анализ и синтез применяются в их связи и единстве, как две неразрывные стороны единого мыслительного процесса.

При разборе задачи мысль ученика всё время движется от вопроса задачи к числовым данным и от числовых данных к вопросу.

«Мне нужно,— рассуждает ученик,— решить такой-то вопрос. На основании каких данных можно его решить? Посмотрим условие задачи, есть ли в нём эти данные».

Или: «В условии задачи даны такие-то числа. На основании их можно решить такой-то вопрос. Но нужно ли его решать, поможет ли это решению вопроса задачи? Посмотрим ещё раз, что спрашивается в задаче».

В первом случае ученик, исходя из вопроса задачи и пользуясь анализом, обращается к условию задачи, к задаче в целом, и только на основе целостного представления задачи, как совокупности данных и вопроса, намечает правильный путь решения. Во втором случае, исходя из данных задачи и пользуясь синтезом, ученик обращается к вопросу задачи, чтобы при помощи этого вопроса проверить целесообразность выполнения действия над той или иной парой чисел, и, если вопрос задачи подтверждает необходимость объединения данной пары чисел, останавливается на ней и намечает правильный путь решения задачи.

Таким образом, при разборе задачи, при отыскании путей её решения анализ и синтез находятся в постоянном взаимодействии, дополняют и проверяют друг друга.

Но в каждом конкретном случае, взаимодействуя, они играют неодинаковую роль в зависимости от того, что при разборе задачи является исходной позицией: вопрос задачи или числовые данные в задаче. Если ученик, разбирая задачу, исходит из вопроса, анализ выступает на передний план и играет ведущую роль; синтез ему сопутствует. Когда же за исходное начало берутся числовые данные, на передний план выступает синтез: он даёт движение мысли, ему принадлежит руководящая роль; анализ ему только сопутствует, служа средством проверки целесообразности подбора чисел и действия над ними.

Исходное начало оказывает столь значительное влияние на весь последующий ход рассуждений, что аналитико-синтетический метод разбора в практике и в методической литературе получил разные названия: анализ в случае отправления от вопроса задачи и синтез в случае отправления от числовых данных. В таком именно условном понимании и можно применять термины «аналитический разбор», «синтетический разбор», памятуя, что в действительности полноценный разбор не может быть иным, как только аналитико-синтетическим.

В методической литературе и в практике передовых учителей анализу, как способу разбора задачи, отдаётся преимущество перед синтезом, так как он в большей мере, чем синтез, способствует развитию логического мышления учащихся. Это объясняется тем, что он фиксирует преимущественно внимание учащихся на вопросе задачи. С вопроса начинаются рассуждения учащегося, ведущие его через ряд промежуточных вопросов к той паре чисел, которая даёт возможность начать решение.

Способствуя развитию логического мышления, анализ вместе с тем способствует и развитию речи.

Мышление тесно связано с речью. Мышление в речи не только выражается, оно в речи и совершается.

Анализ ставит ученика перед необходимостью выражать мысли в слове. Мысль не сразу появляется в готовой речевой форме. Мысль, чётко оформленная в слове, появляется в результате сложной и часто очень трудной работы. Зато эта работа имеет огромное значение и для формирования мысли и для развития речи. Опыт показывает, что затраченные ребёнком и педагогом в этом направлении усилия вполне оправдывают себя: речевая и мыслительная культура растёт планомерно и быстро.

Признание этого факта ставит пред нами вопрос о борьбе за широкое внедрение анализа в практику массовой школы и о разработке тех условий, которые делают анализ доступным для учащихся начальной школы.

В числе этих условий первое и главное место занимает соблюдение строгой постепенности в нарастании сложности форм анализа и трудности его для учащихся.

Методы и приёмы обучения анализу арифметической задачи.

Уже при первоначальном ознакомлении детей с составной задачей в I классе целесообразно использовать аналитический приём, ведя учеников от готовой задачи в два действия к составляющим её простым задачам (а не наоборот, как это часто делается в школьной практике и рекомендуется во многих методических руководствах). Специфика составной задачи состоит в том, что её нельзя решить сразу, одним действием, как это делается при решении простой задачи. Если при первом знакомстве с составной задачей отправляться от готовой задачи в два действия, то разница между простой и составной задачей выступает с полной отчётливостью.

С этого времени перед решением задачи дети устанавливают, можно ли её решить сразу. Если выясняется, что нельзя, то учитель спрашивает: а что можно узнать сразу?

Так дети впервые начинают применять простейший анализ. Этот анализ опирается на сложный аналитико-синтетический процесс мышления. Вопрос «можно ли решить задачу сразу» побуждает детей подбирать данные к во-

просу; это — момент аналитический. Следующий вопрос «а что можно узнать сразу» побуждает детей подбирать вопрос к данным; это — момент синтетический. Однако ведущим здесь является анализ, а не синтез.

В дальнейшем этот простейший анализ несколько углубляется путём введения дополнительного вопроса «почему».

Решаем задачу: «Мать купила детям барабан за 5 руб. и мячик за 6 руб. Сколько сдачи получила она с 20 руб.?»

Разбирая эту задачу, учитель ставит следующие вопросы:

Можно ли сразу узнать, сколько получено сдачи? (Нет, нельзя.)

Почему нельзя узнать этого сразу? (Потому что мы не знаем, сколько всего надо уплатить за барабан и мячик.)

А можно узнать сразу, сколько нужно уплатить за барабан и мячик? (Да, это можно узнать сразу.)

Привыкнув к вопросу «почему», дети начинают анализировать задачу, не ожидая этого вопроса.

Они рассуждают так: «Сразу нельзя узнать, сколько мама получила сдачи, потому что мы не знаем, сколько всего нужно уплатить за барабан и мячик. Но сколько всего нужно уплатить за барабан и мячик, это можно узнать сразу. Поэтому задачу будем решать так: сначала узнаем, сколько всего уплатила мать за барабан и мячик; потом узнаем, сколько сдачи получила мать с 20 рублей».

Решив составную задачу, дети строят простые задачи, на которые им пришлось расчленить данную составную. Так, решив вышеуказанную задачу, дети записывают её решение:

Задача

1) 5 руб. + 6 руб. = 11 руб.
2) 20 руб. — 11 руб. = 9 руб.

Ответ: 9 руб.

Теперь учитель предлагает детям составить задачи к каждой строчке.

1-я задача: «Барабан стоит 5 руб., а мячик 6 руб. Сколько стоят вместе обе эти игрушки?»

2-я задача: «За игрушки заплатили 11 руб. В кассу же дали 20 руб. Сколько получили сдачи?»

Так уже в первом классе дети научаются расчленять составную задачу на две простые.

Во втором классе дети начинают решать задачи в три действия.

При разборе задач в три действия, одна из самых распространённых ошибок состоит в пропуске промежуточного логического звена.

Возьмём задачу: «В одной корзине было 40 лимонов, а в другой на 10 лимонов больше. Все эти лимоны разложили в ящики по 30 лимонов в каждый. Во сколько ящиков разложили эти лимоны?»

Анализ проводится обычно следующим образом:

Учитель. Можно ли сразу узнать, сколько ящиков понадобится, чтобы уложить все лимоны?

Ученик. Нельзя, так как мы не знаем, сколько лимонов было во второй корзине.

Учитель. А разве в ящики положены лимоны только из второй корзины?

Ученик. Нет, в ящики положены лимоны из двух корзин. Значит, мы не можем сразу решить задачу потому, что не знаем, сколько лимонов было в двух корзинах.

Учитель. Можно ли сразу узнать, сколько лимонов было в двух корзинах?

Ученик. Нет, так как мы не знаем, сколько лимонов было во второй корзине.

Учитель. Можно ли сразу узнать, сколько лимонов было во второй корзине?

После этого составляется устный план решения этой задачи.

Решение задачи записывается. Записав решение задачи, полезно, опираясь на запись действий, составить те простые задачи, на которые расчленена данная задача:

1) В одной корзине 40 лимонов, в другой на 10 лимонов больше. Сколько лимонов во второй корзине? и т. д.

При пользовании таким простейшим анализом главная обязанность учителя следить за тем, чтобы дети не опускали при рассуждении промежуточных логических звеньев. Если учитель допускает такие ошибки и мирится с ними, то тем самым он приучает ученика быть неточным и задерживает развитие у детей логического мышления.

В третьем классе анализ задачи несколько усложняется и делается более полным, принимая ту форму, в какой он применяется на дальнейших ступенях обучения. Усложнение состоит в том, что ученик при разборе задачи научается называть не один (как это было в первом и втором классах), а оба компонента, которые необходимы для решения поставленного вопроса, независимо от того, даны или не даны эти компоненты.

Приведём пример разбора задачи полным анализом.

Задача: «На 59 рублей купили 5 кружек по 7 рублей и 6 стаканов. Сколько стоил каждый стакан?»

Учитель. Что спрашивается в задаче?

Ученик. В задаче спрашивается, сколько стоит один стакан.

Учитель. Какие два числа надо знать, чтобы сразу решить этот вопрос?

Ученик. Надо знать, сколько стаканов купили и сколько за них заплатили.

Учитель. Известны ли нам эти числа?

Ученик. Нам известно, сколько стаканов купили (6 стаканов), но неизвестно, сколько стоили все стаканы. И т. д.

Без наводящих вопросов, в связном изложении ученика полный анализ будет иметь следующую форму:

«В задаче спрашивается, сколько стоит каждый стакан. Чтобы

решить этот вопрос, надо знать, сколько стоят все стаканы и сколько стаканов купили.

Сколько стаканов купили, нам известно — 6 стаканов. А сколько стоят все стаканы, неизвестно.

Чтобы узнать, сколько стоят все стаканы, надо знать, сколько стоит вся покупка и сколько стоят кружки. Сколько стоит вся покупка, нам известно — 59 рублей, а сколько стоят кружки, неизвестно.

Чтобы узнать, сколько стоят все кружки, надо знать, сколько стоит одна кружка и сколько кружек купили. Оба эти числа нам известны. Итак, первый вопрос задачи: «Сколько стоят все кружки?» и т. д.

Как мы видим, здесь на каждом этапе рассуждения ученик называет те д в е величины, которые необходимы для решения вопроса. Такая полная, стройная и законченная форма рассуждения даётся ученику не сразу и не без труда. К ней нужно основательно подготовить учащихся. Той подготовки, которая велась на протяжении первого и второго классов, недостаточно. Нужны новые подготовительные упражнения, на которых следует показать, что а) для решения задачи надо выполнить над числами одно или несколько арифметических действий и б) в каждом случае для выполнения действий необходимо и достаточно иметь д в а числа. Это показывается на простых задачах троякого вида, которые могут встретиться при анализе составных задач:

1) оба числа, необходимые для решения поставленного вопроса, неизвестны;

2) одно число известно, другое неизвестно;

3) оба числа известны.

Упражнения лучше начать с задач, в которых одно число известно. Например: «Мальчик сорвал 8 яблок с одной яблони и несколько яблок с другой. Сколько всего яблок сорвал мальчик?»

Задача разбирается так:

Учитель. Можно ли решить эту задачу?

Ученик. Нельзя.

Учитель. Почему нельзя её решить?

Ученик. Потому что мы не знаем, сколько яблок мальчик сорвал с другой яблони.

Учитель. Сколько же чисел надо иметь, чтобы решить эту задачу?

Ученик. Надо иметь два числа.

Учитель. И каким действием она решается?

Ученик. Сложением.

Вывод: чтобы узнать, сколько всего сорвано яблок, надо знать: сколько сорвано с одной яблони и сколько сорвано с другой яблони. После этого учитель называет второе число, допустим, 12 яблок, и ученики решают задачу.

Проделав упражнения в анализе на простых задачах, нужно перейти к а н а л и з у з а д а ч в д в а д е й с т в и я, а затем и в т р и д е й с т в и я.

Анализ задач в 3 действия представляет собой довольно длинное рассуждение. Чтобы ученики не теряли нить в рассуждении, его нужно разбивать на отдельные звенья и создавать опору для этих звеньев в наглядном образе. Роль такого образа может играть схема, состоящая из кружочков, заполненных числовыми данными задачи и вопросительными знаками для обозначения неизвестных.

Полезно вначале для упражнений в полном анализе решить 5—6 таких задач, в которых анализ иллюстрируется схемой, имеющей симметричный вид. Например:

«Магазин продал в один день 40 ящиков винограда по 18 *кг* в каждом ящике, а на другой день 20 ящиков по 12 *кг*. Сколько всего килограммов винограда продал магазин за два дня?»

Первое звено анализа этой задачи подготовлено работой над простыми задачами, в которых оба числа неизвестны. Их места займут кружки с вопросительными знаками. Второе и третье звено — анализ простых задач на умножение с известными данными.

Схема разбора задачи (рис. 11):

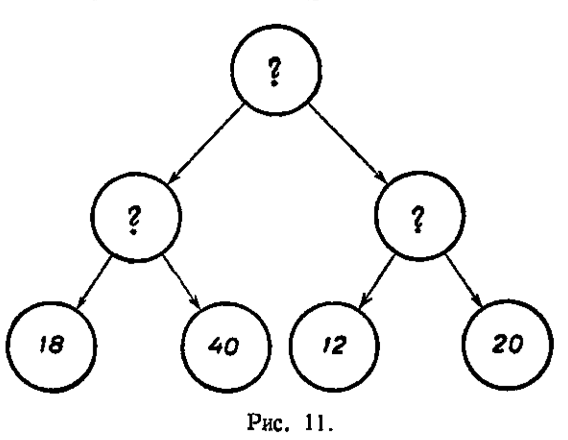


Рис. 11.

В четвёртом классе анализ осложняется в двух отношениях: с одной стороны берутся более трудные задачи, с другой стороны от учащихся требуется в формулировке рассуждений большая самостоятельность. Анализируя задачу, ученик связно рассуждает, поясняет разбор задачи чертежом на доске, или, если задача решена дома, рассуждает вслух, глядя на чертёж в тетради.

В начале года учащиеся IV класса практикуют анализ примерно той же степени трудности, что и в III классе. С некоторой осторожностью надо подходить к задачам с выражением «больше или меньше на столько-то или во столько-то раз». Много таких задач решается в III и даже во II классе, но с применением простейшего анализа. В IV классе они решаются с применением полного анализа.

В IV классе одновременно ведётся усиленная работа по усвоению учащимися зависимости между величинами, в особенности между теми из них, которые чаще встречаются в задачах и в

практической жизни: между ценой, стоимостью и количеством, между расстоянием, скоростью и временем, между весом, весовой единицей и количеством весовых единиц, между общим урожаем, урожаем с единицы площади и величиной площади и т. д.

На устном решении несложных задач ученики усваивают: какую величину можно найти по двум данным величинам (по скорости и времени — расстояние; по цене и количеству — стоимость; по площади и общему урожаю — урожай с единицы площади — ара или гектара и т. д.); какие две величины надо иметь в качестве данных, чтобы определить искомую величину (для нахождения цены достаточно знать стоимость и количество; для отыскания пути, пройденного телом, достаточно знать скорость и время движения; для нахождения общего веса — весовую единицу и количество таких единиц и т. д.).

Знание зависимости между величинами является необходимым условием для успешного проведения анализа. Если учащийся слабо разбирается в этом вопросе, его рассуждения будут сбивчивы и ошибочны.

Итак, облекая анализ задачи в определённую словесную форму, добиваясь от учащихся точных формулировок, сначала в виде ответов на наводящие вопросы, позднее в виде связного рассуждения, мы создаём условия, при которых мышление и язык формируются и развиваются, а это в свою очередь является условием успешного решения задач.

Составление плана решения задачи.

Из разбора вытекает план решения задачи. Составить план — это значит сформулировать вопросы простых задач, на которые в результате анализа распадается сложная задача, и наметить последовательность их решения.

Перед тем как переходить к вычислениям, надо иметь устный план решения всей задачи от начала до конца, от первого до последнего вопроса. Ученик только тогда будет производить действия сознательно и уверенно, когда для него ясен весь путь решения, когда ему видны все вехи на этом пути.

Метод решения задачи по отдельным вопросам, когда намечается только первый вопрос и сейчас же даётся его решение, без ясного представления всей перспективы решения, надо признать неполноценным.

План, как известно, может быть не только устным, но и письменным.

Устный план составить легче, чем письменный. Несмотря на это, во многих случаях не следует ограничиваться только устным планом, но нужно формулировать вопросы и письменно. Замедленное течение мысли, неизбежно связанное с записью вопроса, некоторая задержка на вопросе и преодоление трудностей, связанных с поиском более точных выражений, — всё это приковы-

вает внимание ученика к вопросу и учит его глубже вникать в сущность вопроса. Способы и приёмы решения от этого прочнее запечатлеваются в сознании и памяти учащихся. Вот почему обучение детей составлению письменного плана является обязательным.

В младших классах (I и II) нужно составлять только устный план, так как навыки письменной речи здесь ещё очень несовершенны и на стилистическое оформление плана потребовалось бы больше времени и энергии, чем на уяснение математической стороны плана. В I и II классах надо приучить учеников составлять план перед решением задачи и научить их устно формулировать вопросы, по возможности ясно, чётко и кратко.

В старших классах — в III и IV — наряду с работой над устным планом вводится и составление письменного плана. Письменный план обычно предваряется составлением устного плана: после того как задача проанализирована, учитель заставляет учеников сначала сказать вопросы, а потом писать их вместе с решением задачи.

Возникает вопрос: «Сколько задач можно решить в каждом классе с устным планом и сколько с письменным, чтобы научить учеников хорошо решать задачи?» Экспериментальных данных для ответа на этот вопрос нет. Но из практики массовой школы видно, что наиболее целесообразным можно считать такое соотношение, при котором из общего количества решённых задач около половины решается только с устным планом и несколько больше половины — с письменным планом. При этом значительная часть задач с письменным планом решается дома, в порядке выполнения домашних заданий. В классе же решаются задачи с письменным планом или новые по типу, или трудные по содержанию и по формулировке вопросов.

Форма изложения письменного плана может быть разнообразной. Покажем различные варианты письменного плана на примере конкретной задачи.

Задача. «Подводная лодка прошла на поверхности воды 106 *км* 300 *м*, а под водой на 8 *км* 100 *м* меньше. На воде лодка шла со скоростью 360 *м* в минуту, а под водой со скоростью, равной $^3/_4$ скорости на поверхности воды. Сколько времени лодка шла под водой?»

План к этой задаче может быть составлен в форме вопросов.

1. Какое расстояние прошла подводная лодка под водой?
2. С какой скоростью она шла под водой?
3. Сколько времени лодка шла под водой?

Эта обычная, наиболее распространённая форма письменного и устного плана. Но план можно составить и в форме кратких утвердительных предложений; тогда он может быть сформулирован так:

1. Расстояние, пройденное лодкой под водой.
2. Скорость лодки под водой.

3. Время движения лодки под водой.

Такой план короче, но формулировка его для учащегося труднее: она предполагает наличие у ученика уменья пользоваться терминами — понятиями: «скорость» вместо «сколько километров проходит лодка в час», «расстояние» вместо «сколько пройдено километров» и т. д.

План может быть или объединён с решением, или отделён от него. В первом случае получается следующая запись:

1. Какое расстояние прошла подводная лодка под водой?

105 *км* 300 *м* — 8 *км* 100 *м* = 97 *км* 200 *м*

2. С какой скоростью шла лодка под водой?

360 *м* : 4 = 90 *м*; 90 *м* × 3 = 270 *м*

3. Сколько времени шла лодка под водой?

97 *км* 200 *м* : 270 *м* = 360 (мин.); 360 мин.= 6 час.

Ответ: 6 час.

Если же план отделяется от решения, то получается следующая запись:

План решения.

1. Какое расстояние прошла подводная лодка под водой?
2. С какой скоростью шла лодка под водой?
3. Сколько времени шла лодка под водой?

Решение.

1. 105 *км* 300 *м* — 8 *км* 100 *м* = 97 *км* 200 *м*.
2. 360 *м* : 4 = 90 *м*; 90 *м* × 3 = 270 *м*.
3. 97 *км* 200 *м* : 270 *м* = 360 (мин.); 360 мин.= 6 час.

Ответ: 6 час.

Первая форма, как показывает опыт, проще и легче для учащихся. С неё нужно начинать знакомство с письменным планом в III классе. На ней можно и остановиться в начальной школе, не переводя детей на раздельную запись плана и решения.

В письменном плане приходится иметь дело с требованиями не только арифметики, но и русского языка; при записи плана ученик встречается с различными правилами правописания, стилистики. При надлежащей постановке, записи могут способствовать укреплению навыков правильного письма, и, наоборот, они могут быть рассадниками неграмотности. Это обязывает учителя следить за культурой письма, предупреждать в письменном плане ошибки орфографические и стилистические, исправлять их при просмотре тетрадей. Нужно бороться с тенденцией писать слова сокращённо; нужно требовать в плане полной записи слов. Сокращения допускаются только в наименованиях при числах, на-

пример 16 *ц*, 24 *кг* и т. д. Но если слово «центнер» или «килограмм» выступает в вопросе как самостоятельное слово, то его нужно писать полностью. Например: «Сколько центнеров пшеницы собрали с гектара?»

Решение (вычисления).

После составления плана учащиеся приступают к решению задачи. На этом этапе они должны правильно выбрать числа и действие для каждого вопроса, записать это действие и произвести необходимые вычисления. Указывая действия, учащиеся должны кратко пояснить, почему они в каждом данном случае применяют то, а не иное действие: например, поясняя третье действие в вышеуказанной задаче, ученик должен сказать:

«Чтобы узнать, сколько времени шла лодка под водой, надо 97 *км* 200 *м* разделить на 270 *м*, потому что под водой лодка шла столько минут, сколько раз 270 *м* содержится в 97200 *м*, а чтобы это узнать, нужно 97200 разделить на 270».

При записи решения можно каждое действие записать столбиком:

```
1)  105 км 300 м        2) 360 м : 4 = 90 м
 –    8 км 100 м            90 м × 3 = 270 м
    97 км 200 м

3) _97200 м |270 м
     810     |360 (мин.)
   _1620      360 мин. = 6 час.
    1620
       0
```

Ответ: 6 час.

Записи решения можно придать и другую форму: можно запись действий отделить от записи вычислений, расположив их следующим образом:

```
1) 105 км 300 м – 8 км 100 м = 97 км 200 м   | 1) _105 км 300 м
2) 360 м : 4 × 3 = 270 м                      |       8 км 100 м
3) 97 км 200 м : 270 м = 360 (мин.) = 6 час.  |      97 км 200 м

                                    3) _97200 |270
                                         810   360 (мин.)
                                        _1620
                                         1620  360 мин. = 6 час.
                                            0
```

Во многих случаях такая запись удобнее первой. Действие всегда записывается с наименованиями; вычисления, наоборот, удобнее производить над отвлечёнными числами, широко при этом используя переместительное свойство суммы и произведения.

Допустим, что по ходу решения задачи нужно узнать, сколько стоят 1 325 *кг* извести, если один килограмм стоит 9 коп. В таком

случае записываем действие в строчку с наименованиями, а против этой строчки записываем вычисление без наименований, переменив при этом для удобства вычисления места сомножителей:

9 коп. × 1 325 = 119 руб. 25 коп. | $\times \begin{array}{r} 1\,325 \\ 9 \\ \hline 11\,925 \end{array}$

Вычисления можно располагать не на правой стороне тетради, а под записью действия, например:

28 руб. 4 коп. × 36 = 1009 руб. 44 коп.

$$\begin{array}{r} 2804 \text{ коп.} \\ \times 36 \phantom{\text{ коп.}} \\ \hline 16824 \phantom{\text{ коп.}} \\ 8412 \phantom{6\text{ коп.}} \\ \hline 100944 \text{ коп.} \end{array}$$

Форма записи может быть различной. Но, установив для учащихся ту или иную форму, надо следить за тем, чтобы учащиеся строго её придерживались и чтобы в записях был определённый порядок.

Решение задач с письменным объяснением.

Письменное объяснение решения задачи в начальной школе может включать в себя:

а) изложение плана решения задачи,

б) объяснение каждого действия задачи,

в) пояснение результата действия.

Что касается анализа задачи, то он обычно имеет столь сложную стилистическую форму, что письменное изложение его для учащихся начальной школы непосильно, а потому и преждевременно. В начальной школе можно требовать изложения анализа только в устной форме.

Методика обучения детей письменному плану рассмотрена выше. Здесь же мы рассмотрим вопрос о том, как обучать детей письменному объяснению действий и пояснению результатов действий.

К устному объяснению действий учеников приучают с I класса. Так, уже в I классе после решения задачи «Карандаш стоит 8 коп., а ручка на 2 коп. дороже. Сколько стоит ручка?» учитель, получив ответ «10 коп.», спрашивает ученика: 1) как ты узнал, что ручка стоит 10 коп.? и 2) почему ты к 8 прибавил 2?

Отвечая на второй вопрос учителя, ученик объясняет действие сложения: «В задаче сказано, что ручка стоит на 2 коп. дороже, больше 8. А чтобы 8 увеличить на 2, надо к 8 прибавить 2». В этом и заключается объяснение действия сложения.

Приведём ещё пример из практики II класса. Допустим, что ученики решили задачу: «2 метра ленты стоят 8 руб. Сколько

метров ленты можно купить на 20 руб.?» Первое действие (деление на равные части) в решении этой задачи объясняется так: «2 *м* ленты стоят 8 руб. А один метр стоит в два раза меньше. Чтобы число 8 уменьшить в 2 раза, надо его разделить на 2». Второе действие — деление по содержанию — объясняется так: «На 20 руб. можно купить столько метров, сколько раз 4 руб. содержится в 20 руб. А чтобы узнать, сколько раз 4 руб. содержится в 20 руб., надо 20 разделить по 4».

Польза таких объяснений несомненна: учащиеся учатся сознательному применению арифметических действий в различных конкретных случаях. Кроме того, на таких объяснениях развивается математическая речь учащихся.

Эти объяснения кратки по форме и элементарны по содержанию. Но, несмотря на это, овладение ими сопряжено для детей с значительными трудностями, и нужна длительная и систематическая работа, прежде чем ученик научится хорошо объяснять действия. Понятно, что устная форма объяснений легче, чем письменная. Поэтому в младших классах (в I, II и III) ученики ограничиваются устными объяснениями и только в IV классе, где речь и мышление учащихся достигают значительного развития, можно приучать детей к письменному объяснению действий. Письменное объяснение действий целесообразно соединить с планом решения. Покажем образец такого объяснения на конкретном примере:

Задача: «Направляясь на Дальний Восток, одна семья проехала 10 360 *км*. По железной дороге она ехала 11 дней, проезжая в день по 840 *км*, а на пароходе она проезжала в день по 280 *км*. Сколько всего дней была в дороге эта семья?»

Решение с объяснением.

1. Сколько километров проехала семья по железной дороге?

В один день семья проезжала 840 *км*, а в 11 дней она проехала в 11 раз больше. Чтобы узнать расстояние, нужно 840 *км* умножить на 11:

840 *км* × 11 = 9 240 *км*

```
 840 км
×  11
 ----
   84
  84
 ----
 9240 км
```

2. Сколько километров проехала семья на пароходе?

Всего семья проехала 10 360 *км*; из них по железной дороге — 9 240 *км*, а остальное на пароходе. Чтобы узнать, сколько семья проехала на пароходе, нужно из 10 360 *км* вычесть 9 240 *км*.

```
 10 360 км
−  9 240
 -------
  1 120 км
```

3. Сколько суток ехала семья на пароходе?

На пароходе семья проехала 1 120 *км*, проезжая в сутки по 280 *км*. Следовательно, она ехала столько суток, сколько раз 280 *км* содержится в 1 120 *км*. Чтобы узнать, сколько раз 280 содержится в 1 120, нужно:

$$\begin{array}{r|l} 1120 & 280 \\ -1120 & 4 \text{ (сут.)} \\ \hline 0 & \end{array}$$

4. Сколько всего суток была семья в дороге?

По железной дороге семья ехала 11 суток, а на пароходе 4 суток. Чтобы узнать, сколько всего суток была семья в дороге, нужно 11 суток и 4 суток сложить:

11 сут. + 4 сут. = 15 суток.

Ответ: В дороге семья была всего 15 суток.

Таким образом, письменное объяснение задачи сводится к тому, что формулируется вопрос, указываются числовые данные, необходимые для решения этого вопроса, называется то действие, которое надо произвести над указанными числами, и выполняется названное действие.

В тех случаях, когда задача решается без письменного плана, полезно иногда требовать от учеников (особенно от слабых), чтобы они давали письменное пояснение результата каждого действия. Решение вышеуказанной задачи с письменным пояснением результатов будет иметь следующий вид:

1) 840 *км*×11=9 240 *км* проехала семья по железной дороге.
2) 10 360 *км*—9 240 *км*=1 120 *км* проехала семья на пароходе.
3) 1 120 *км* : 280 *км*=4; четверо суток ехала семья на пароходе.
4) 11 сут.+4 сут.=15 суток была семья в дороге.

Решение задачи несколькими способами.

С возможностью решить одну и ту же задачу двумя способами ученик встречается, начиная с I класса. Уже в I классе встречаются такие задачи, решение которых сопряжено с необходимостью от данного числа отнимать сумму двух чисел или к данному числу прибавлять сумму двух чисел. Например: «У хозяйки было 20 руб. Она купила картофеля на 8 руб. и луку на 6 руб. Сколько денег осталось у хозяйки?» Одни учащиеся эту задачу могут решить так: 1) 8 руб + 6 руб.= 14 руб.; 2) 20 руб.—14 руб.=6 руб.

Другие учащиеся решают её иначе, а именно: 1) 20 руб.—8 руб.=12 руб.; 2) 12 руб.—6 руб.=6 руб.

Знакомя учащихся с этим видом задач, учитель показывает и объясняет детям первый способ решения как более рациональ-

ный: естественно, сначала подсчитать весь расход, а потом уже найти остаток. Такого способа он требует и от учащихся. Однако, если кто-либо из учащихся, выполняя домашнее задание, решит подобного рода задачу двумя последовательными вычитаниями (второй способ), то такое решение нельзя считать ошибочным: в нём есть своя логика, а главное, своё математическое основание. Его можно признать лишь нерациональным, не соответствующим тому, чему учитель учит на уроке. Учитель поступит правильно, если он скажет такому ученику: «У тебя задача решена правильно, но не таким способом, как мы учились решать её в классе; лучше решить её так, как решили все другие ученики». И дальше следует выяснение того, как решили её другие ученики.

Значительно осложняется вопрос о решении задач несколькими способами во II классе, где круг задач, допускающих двоякий способ решения, сильно расширяется в связи с тем, что при изучении умножения и деления в пределе 100 имеется возможность практического использования распределительного и сочетательного свойства умножения и деления. Приведём несколько примеров таких задач, при решении которых возможно и целесообразно использовать указанные свойства умножения и деления.

Задача: «Один столяр делает в день 3 рамы, другой 5 рам. Сколько рам сделают оба столяра за неделю (6 дней)?» Эта задача, как известно, может быть решена либо по такой формуле: $(3\times6)+(5\times6)=48$, либо по иной: $(3+5)\times6=48$.

Задача: «Раньше хозяйка платила за килограмм белой муки 12 руб.; теперь, после снижения цен, она платит за килограмм такой же муки только 7 руб. Сколько рублей экономит хозяйка, благодаря снижению цен, на 5 *кг* муки?» Эта задача может быть решена либо по формуле: $(12\times5)-(7\times5)=25$, либо по другой формуле: $(12-7)\times5=25$.

Задача: «Два пионерских отряда, один в 28 человек, другой в 32 человека, построились рядами, по 4 человека в каждом ряду. Сколько получилось рядов?» Эту задачу можно решить по формуле: $(28:4)+(32:4)=15$; но её можно решить и по формуле: $(28+32):4=15$.

Во всех приведённых задачах использование распределительного свойства умножения и деления приводит ко второму способу решения. Ясно, что решив задачу первым способом, учитель может показать учащимся, как эта задача решается и другим способом, к этому в таких случаях побуждает учителя и задачник, где к таким задачам даётся примечание: «Решить задачу двумя способами».

Использование сочетательного свойства умножения и правила деления числа на произведение также даёт возможность решать ряд задач двумя способами. Например:

Задача: «Ларёк продал за день 2 ящика печенья. В каждом ящике было по 4 *кг*, ценой по 30 руб. за килограмм. Сколько

рублей выручил ларёк за проданное печенье?» Эту задачу, как известно, можно решить либо так: 30×(4×2), либо в ином порядке: (30×4)×2.

З а д а ч а: «Из лесу вывезли на двух грузовых машинах поровну 96 брёвен. Сколько поездок сделала каждая машина, если за один раз на машине привозили 12 брёвен?» Эту задачу можно решить также двояким способом: (96 : 2) : 12=4; 96 : (12×2)=4.

Таким образом, возможность решать задачу двумя способами — во II классе не случайное явление, а вполне закономерное, вытекающее из свойств арифметических действий.

Решение задач указанных видов двумя способами является необходимостью, так как оно способствует накоплению конкретных представлений, которые в дальнейшем будут положены в основу обобщений при формировании понятий о законах арифметических действий.

В III и IV классах работа над решением задач несколькими способами продолжается. Здесь встречаются задачи тех видов, которые указаны во II классе, только с большими числами; к ним прибавляются и новые виды (типы) задач, допускающие возможность решения двумя способами. Из них отметим следующие.

З а д а ч а н а в с т р е ч н о е д в и ж е н и е (III кл.); например:

1. «Из двух городов одновременно вышли навстречу друг другу два поезда. Один поезд шёл со скоростью 45 *км* в час, другой — 50 *км* в час. Встреча поездов произошла через 5 часов после начала движения. Каково расстояние между этими городами?» Как известно, эта задача может быть решена как по формуле: (45×5)+(50×5)=475, так и по формуле: (45+50)×5=475.

2. «Из двух городов, расстояние между которыми 475 *км*, одновременно вышли навстречу друг другу два поезда. Один из них шёл со скоростью 45 *км* в час. С какой скоростью шёл второй поезд, если до встречи они шли 5 часов?» Эту задачу можно решить по формуле: (475—45×5) : 5=50, либо по формуле: (475 : 5)—45=50.

Объяснив первый способ решения этих задач и решив достаточное число упражнений на применении этого способа, учитель показывает и объясняет учащимся решение задач этого типа и другим способом.

Двумя способами, как известно, решаются задачи на нахождение двух чисел по сумме и разности, некоторые задачи на простое тройное правило, на сложное тройное правило. В IV классе после ознакомления учащихся со способом отношений полезно давать учащимся задачи на простое тройное правило, которые можно решать способом приведения к единице и способом отношений. Например: «За 4 часа поезд прошёл 200 *км*. Какое расстояние пройдёт этот поезд за 8 часов (при одинаковой скорости)?».

Чтобы учащиеся в должной мере осознали закономерность решения задач несколькими способами, нужно, не ограничиваясь такими заданиями от случая к случаю, специально в порядке по-

вторения и обобщения остановиться на этом вопросе уже во II классе, посвятив этому вопросу особый урок. Вот примерное содержание такого урока.

Учитель: «В одном классе дети самостоятельно решали задачу: «Для пошивки белья мама купила 6 *м* материи по 9 руб. за метр. Потом она прикупила по той же цене ещё 2 *м*. Сколько стоила материя, купленная в оба раза?»

Когда проверяли решение этой задачи, то оказалось, что две ученицы, Вера и Надя, решили эту задачу по-разному.

Вера решила так:

1) 9 руб. × 6 = 54 руб.
2) 9 руб. × 2 = 18 руб.
3) 54 руб. + 18 руб. = 72 руб.

Ответ: 72 руб.

Надя решила так:

1) 6 *м* + 2 *м* = 8 *м*
2) 9 руб. × 8 = 72 руб.

Ответ: 72 руб.

Учитель: «Кто же из девочек решил эту задачу правильно?»

Ученик: «Обе решили правильно».

Учитель: «Поставьте вопросы к каждому действию в первом решении».

Ученик формулирует 3 вопроса.

Учитель: «Поставьте вопросы к каждому действию во втором решении».

Ученик формулирует 2 вопроса.

Учитель: «Оба решения правильны. Но какое решение мы должны признать лучшим и почему?»

Ученик: «Надино решение лучше, потому что оно более простое: оно состоит только из двух действий, в то время как Верино решение состоит из трёх действий».

Учитель: «Да, Надин способ решения более экономный; он скорее приводит к цели, поэтому таким способом и надо решать такие задачи».

Учитель: «Рассмотрим ещё одну задачу.

В том же классе ученики решали самостоятельно и другую задачу:

«Рабочий израсходовал за 3 дня 40 руб.; в первый день он израсходовал 16 руб., во второй день — 14 руб. Сколько рублей рабочий израсходовал в третий день?»

При проверке оказалось, что и эту задачу ученики решили разными способами.

1-й способ (у большинства)

1) 16 руб. + 14 руб. = 30 руб.
2) 40 руб. — 30 руб. = 10 руб.

Ответ: 10 руб.

2-й способ (у меньшинства)

1) 40 руб. — 16 руб. = 24 руб.
2) 24 руб. — 14 руб. = 10 руб.

Ответ: 10 руб.

Какой же здесь способ решения правильный?»

Ученик: «Оба способа правильны».

Учитель: «Поставьте вопросы к каждому действию при первом способе решения».

Ученик формулирует вопросы.

Учитель: «Поставьте вопросы к каждому действию при втором способе решения».

Ученик формулирует вопросы.

Учитель: «Оба способа привели к правильному ответу. Оба способа содержат одинаковое число действий. Но всё же, какой из них можно признать лучшим?»

На этот вопрос обычно даются разные ответы; большинство склоняется к признанию преимущества за первым способом: «Легче ставить вопросы», «Лучше сразу подсчитать расход» и др.

После рассмотрения этих двух задач следует сделать вывод:

«Некоторые задачи можно решать не одним, а двумя способами. Из двух способов тот лучше, который является более простым, понятным и экономным».

Вслед за этим (на следующем уроке и в порядке домашнего задания) предлагается ученикам решить двумя способами ряд задач, аналогичных вышеприведённым, в которых находят практическое применение основные свойства арифметических действий.

Постепенное усложнение и развитие задачи как приём обучения детей решению задач.

Для выработки у детей уменья решать задачи, полезно иногда показать ученикам задачу в её развитии, в её постепенном усложнении, вводя в решённую задачу новые данные, новые условия. При этом ученик получает возможность видеть, как новые условия влияют на ход решения задачи, на ход рассуждений. Приведём для примера четыре такие задачи, из которых каждая последующая является усложнением предыдущей.

1-я задача. Ученик купил книг на 2 руб. 85 коп. и письменных принадлежностей на 80 коп. Сколько стоила вся покупка?

2-я задача. Ученик купил 3 учебника по 95 коп. и 8 тетрадей по 10 коп. Сколько стоила вся покупка?

3-я задача. Ученик купил 8 тетрадей по 10 коп. и 3 учебника. Каждый учебник стоил дороже тетради на 85 коп. Сколько стоила вся покупка?

4-я задача. Ученик купил тетрадей и книг, всего 11 штук, причём тетрадей было на 5 больше, чем книг. Тетрадь стоила 10 коп., учебник — 95 коп. Сколько стоила вся покупка?

Здесь поучительным для ученика является анализ задач. Во всех задачах для ответа на вопрос задачи требуется знать, сколько стоили тетради и книги в отдельности. В первой задаче эти стоимости даны, поэтому она решается сразу, одним действием.

Во второй задаче эти стоимости не даны, их нужно узнать. Каждая из них находится одним действием. Поэтому решение задачи сводится к трём вопросам-действиям.

В третьей задаче стоимости также не даны, их нужно узнать. Но их определение усложняется тем, что в условии задачи не дана цена книги. Эту цену можно узнать. Это влечёт за собой дополнительное — четвёртое действие.

И, наконец, в четвёртой задаче для определения стоимости каждой покупки нужно предварительно узнать число тетрадей и число книг. Это вносит значительное усложнение в решение, которое сводится к постановке и решению пяти вопросов.

Полезно также вводить в условие задачи такие изменения, которые приводят ученика к необходимости различать близкие между собой понятия (например, понятия кратного и разностного сравнения чисел, понятие увеличения числа в несколько раз и на несколько единиц и др.) и выбирать соответствующие им арифметические действия.

Пусть, например, решена задача: «В парке 25 берёз и вдвое больше сосен. Сколько всего деревьев в парке?» После этого полезно предложить задачу: «В парке 25 берёз, а сосен на 2 больше. Сколько всего деревьев в парке?» Решив обе задачи, нужно разобрать, какими действиями решалась каждая задача, чем отличается решение второй задачи от первой, чем обусловлены эти различия.

В вышеприведённых задачах при изменении условия оставался неизменным вопрос задачи. Но можно изменить и вопрос задачи, чтобы показать ученикам, как в связи с изменением вопроса меняется решение задачи.

«В роще было 24 берёзы и в 4 раза больше сосен. Третью часть всех деревьев спилили. Сколько деревьев спилили?»

Та же задача с изменённым вопросом: «В роще было 24 берёзы и в 4 раза больше сосен. Третью часть всех деревьев спилили. Сколько деревьев в роще осталось?» Различные вопросы привели к разным решениям и к разным ответам.

Такого рода задачи особенно полезно решать при повторении и обобщении пройденного.

Они приучают ученика внимательно относиться к тексту задачи и к её главному вопросу: они показывают ученику, что каждое слово в задаче имеет строго определённое значение; каждое данное, вводимое в задачу, вносит свои требования, ограничения, условия, с которыми ученик должен считаться. Они подчёркивают огромную значимость вопроса задачи и дают ученику понять, что, прежде чем решать задачу, нужно отдать себе ясный отчёт в том, в чём же заключается вопрос задачи.

Преобразование задачи как приём обучения решению задач.

Необходимым условием успешного решения задач является знание учащимися зависимости между величинами, т. е. знание того, какую величину можно найти на основе двух данных величин, и, наоборот, уменье найти те две величины, которые необходимы для определения искомой величины. Так, например, ученик должен знать, что по данной скорости и времени можно найти расстояние; по расстоянию и скорости можно найти время, по расстоянию и времени — скорость. Наоборот, если требуется найти расстояние, то для этого достаточно знать скорость и время; если требуется определить скорость, для этого достаточно знать расстояние и время и т. д.

В объяснительной записке к программе сказано, что «уяснение этих зависимостей должно получиться не в результате заучивания каких-либо формул или правил, а в результате решения достаточно большого количества задач». Для этой цели особенно полезно в старших классах решать группы задач с однородными величинами, причём эти группы должны составляться из таких задач, в которых искомое первой задачи было бы данным

во второй задаче, данное же первой задачи должно войти в качестве искомого во вторую задачу.

Поясним это на примере. Допустим, что учитель поставил своей задачей поупражнять учеников в определении зависимости между ценой, стоимостью и количеством. Это с успехом может быть сделано на следующей группе задач, решаемых в III или IV классах:

1-я задача.

«Для детского дома купили 24 *м* полотна и 38 *м* ситца. 1 *м* полотна стоил 10 руб., 1 *м* ситца 6 руб. Сколько стоила вся покупка?»

Решение этой задачи: 1) 10 руб. $\times$ 24 = 240 руб. 2) 6 руб. $\times$ 38 = 228 руб. 3) 240 руб. + 228 руб. = 468 руб.

Перестроим дальше содержание этой задачи так, чтобы в ней требовалось найти цену одного метра ситца.

Для этого введём в условие задачи общую стоимость всей покупки (468 руб.). Тогда получим следующую задачу:

2-я задача.

«Для детского дома купили 24 *м* полотна и 38 *м* ситца. За всю покупку уплатили 468 руб. Сколько стоил 1 *м* ситца, если 1 *м* полотна стоил 10 руб.?»

Решение: 1) 10 руб. $\times$ 24 = 240 руб. 2) 468 руб. — 240 руб. = 228 руб. 3) 228 руб. : 38 = 6 руб.

Аналогично строится задача с вопросом, сколько стоил 1 *м* полотна.

Перестроим теперь содержание нашей задачи так, чтобы искомой величиной в ней было количество ситца. Тогда получится такое условие:

3-я задача.

«Для детдома купили 24 *м* полотна по 10 руб. и несколько метров ситца. За всю покупку уплатили 468 руб. Сколько метров ситца куплено, если 1 *м* ситца стоил 6 руб.?»

Решение: 1) 10 руб. $\times$ 24 = 240 руб. 2) 468 руб. — 240 руб. = 228 руб. 3) 228 руб. : 6 руб. = 38 (метров).

В этой задаче центром внимания учащихся является нахождение количества по стоимости и цене.

Такой всесторонний и разнообразный подход к трём величинам — стоимости, цене и количеству — будет несомненно способствовать лучшему, более глубокому уяснению зависимости и связи между этими величинами. Недаром этот приём обучения решению задач настойчиво рекомендовал Л. Н. Толстой в своей «Арифметике».

Дополнительная работа в связи с решённой задачей.

Получение ответа завершает, как правило, решение данной задачи. Но в связи с решением некоторых задач полезно провести дополнительные упражнения, направленные на более глубокое выяснение смысла данной задачи и приёмов её решения.

Укажем несколько видов работ, связанных с решённой задачей.

1. Связное изложение хода решения задачи. При решении задачи стройное течение логической мысли ученика прерывается вычислительной работой, отвлекающей внимание ученика от смысловой стороны задачи. Целое при этом разбивается на части: задача решается по частям, по отдельным вопросам.

Чтобы воссоздать в сознании ученика целостную картину решения задачи, нужно после получения ответа сделать связное и последовательное изложение всего хода решения задачи с изложением её анализа, плана решения и объяснения каждого действия.

При этом выясняется, какие места в задаче были наиболее трудными, выделяются те простые задачи, которые оказались трудными, и эти задачи даются на других числах, небольших, чтобы вычисления не отвлекали детей от смысла задачи.

2. Проверка решения. После решения задачи и получения ответа полезно произвести проверку решения и установить, верен ли ответ. В некоторых задачах (типовых) это делается легко, в других (обыкновенных арифметических задачах) проверка связана с необходимостью изменять условия данной задачи в том направлении, как это делалось выше, т. е. путём введения в условие изменённой задачи только что полученного ответа в качестве данного и замены одного из данных искомым. Если числовые значения искомого новой задачи и данного прежней задачи совпадут, то задача решена правильно.

3. Составление «своих» задач. Решение некоторых задач полезно заканчивать составлением аналогичных («похожих») задач самими учащимися.

Работа над придумыванием своей задачи по образцу только что решённой заставит учащихся глубже сосредоточиться на данном типе задач, уяснить себе зависимость между величинами, входящими в условие задачи, и ещё раз продумать способ её решения.

«Надо поднять на высшую ступень составление самими учащимися задач,— говорит Н. К. Крупская.— Надо, чтобы в процессе составления задач, взятых из окружающей жизни, сравнения их, обобщений ребята научились бы понимать, что математика помогает изучению закономерности явления»[1].

Возвращаясь к этому вопросу в другом месте, Н. К. Крупская говорит: «Преподаватель математики особенно должен обращать внимание на составление вместе с учащимися жизненных задач, на стимулирование учащихся в этой области»[2].

Допустим, что ученики решили задачу на кратное сравнение чисел: «На поезде можно за 5 час. проехать 300 *км*, а на самолёте можно за один час пролететь 600 *км*. Во сколько раз скорость самолёта в один час больше, чем скорость поезда?»

После решения этой задачи полезно дать учащимся такое задание: «Придумайте каждый такую задачу, в которой надо сравнить скорости движения: пешехода и велосипедиста, лошади и автомобиля, парохода и поезда, мотоцикла и самолёта».

4. Запись решённой задачи в виде числовой формулы. Решение некоторых задач полезно в IV классе записать числовой формулой. Например, решение вышеприведённой задачи на встречное движение можно записать так:

$$45 \times 5 + 50 \times 5 = 475. \text{ Или: } (45 + 50) \times 5 = 475.$$

---

[1] Н. К. Крупская, Избранные педагогические сочинения. Изд. АПН, 1948. стр. 175.

[2] Там же, стр. 264

Числовые формулы помогают ученику отчётливо представить и обобщить способ решения задач данного вида. Числовая формула — необходимая ступень для перехода в последующих классах к буквенной формуле.

Для записи формулой не нужно брать слишком громоздкие решения, которые требуют применения в формуле квадратных скобок.

После решения таких задач, в которых отражается социалистическое строительство, полезно кратко подчёркивать политический смысл или общественную значимость полученного ответа. Например, пусть решена задача о передовых людях колхозной деревни: «14 комбайнеров в Чкаловской области скосили в среднем каждый по 374 *га*. Двое же братьев Оськиных скосили столько, сколько 14 комбайнеров. Сколько гектаров скосили братья Оськины?»

Полученный ответ можно комментировать так: «Вот видите, дети, каких больших успехов достигают люди, хорошо владеющие техникой».

Второй пример:

Пусть решена задача: «Средний урожай ржи в нашем колхозе составляет 15 *ц* с *га*, а звено бригадира Никулина добилось с 3 *га* 135 *ц*. Во сколько раз урожай у Никулина выше, чем урожай других колхозников?» Решение этой задачи учитель может закончить следующим замечанием: «Вот, оказывается, какой высокий урожай можно получить, если вложить в это дело большой труд и знания».

Такие комментарии подчёркивают социальное значение содержания задачи и усиливают её воспитательное воздействие на учащихся.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ.

Типовыми задачами принято называть такие задачи, которые решаются особыми способами. В зависимости от способов решения в начальной школе различают следующие типы задач: задачи на простое тройное правило, на сложное тройное правило, задачи на нахождение двух чисел по их сумме и разности, по их сумме и кратному отношению, задачи на пропорциональное деление, на исключение неизвестного и др.

Но в некоторых типах задачи объединены по тематике их содержания; сюда относятся задачи на движение, на вычисление площадей, на вычисление объёмов, на вычисление времени.

Среди названных выше типовых задач имеются задачи алгебраического характера, которые в средней школе решаются путём составления уравнений, а в начальной школе — арифметическими методами; таковы задачи на нахождение двух чисел по их сумме и разности, задачи на исключение одной из величин и др. «В курсе

арифметики,— говорится в объяснительной записке к программе,— должно быть уделено много внимания решению так называемых типовых задач. При решении их приходится вводить новые условия, делать некоторые предположения и выводить следствия, вытекающие из этих предположений. Благодаря этому решение типовых задач содействует математическому развитию учащихся».

Общие требования к методике решения типовых задач.

1. При расположении типовых задач необходимо соблюдать систему, обеспечивающую постепенное нарастание сложности и трудности задач. Имея в виду, что многие типы задач связаны между собой по способу решения, необходимо располагать эти задачи так, чтобы каждый последующий тип опирался на предыдущий как на свою основу. Так, задачи на простое тройное правило являются опорой для задач на сложное тройное правило; задачи, решаемые способом исключения одной из величин, имеют своей основой задачи на нахождение неизвестного по двум разностям и т. д. Каждый тип задач имеет свои вводные, подготовительные задачи, являющиеся простейшими задачами этого типа; с иих и должио начинаться знакомство детей с задачами данного типа.

2. Первые задачи для ознакомления с данным типом следует брать с небольшими числами и с простым содержанием для устного их решения.

3. В отыскании способа решения задачи каждого данного типа дети должны принимать самое деятельное участие. Чтобы помочь детям найти способ решения, должны быть использованы:

а) запись условия задачи в виде схемы, б) наглядные пособия, помогающие детям наглядно представить арифметическое содержание задачи, в) сближение задач с знакомой детям жизненной практикой, г) разбор задачи и доступное детям рассуждение, вскрывающее связи и отношение данных в задаче величин.

4. Некоторые типовые задачи поддаются аналитическому разбору так же, как и нетиповые. К таким задачам относятся: задачи на простое и сложное тройное правило, задачи на пропорциональное деление, задачи на движение. Но другие типы задач требуют анализа особого рода. В одних случаях в этом анализе большую роль играет установление причинно-следственных связей между данными в задаче величинами (задачи на нахождение неизвестного по разности двух чисел, задачи, решаемые способом исключения одной из величин); в других случаях в этом анализе большое значение имеет момент предположения, ведущий к преобразованию условия задачи (задачи на нахождение чисел по их сумме и разности), а также введенне условной единицы — «части» (задачи на нахождение двух чисел по сумме и кратному отношению).

Каждая разновидность анализа имеет свою словесную форму и представляет определённый тип рассуждения. Эти рассуждения

нередко являются главным средством к отысканию способа решения, так как посредством их ученик вскрывает связи и отношения между данными в задаче величинами.

5. При изучении нового типа задач нужно прорешать подряд несколько задач, чтобы у учащихся сложилось понятие о типе задачи и об основном приёме решения задач данного типа.

Однако не следует вводить подряд чрезмерно большого количества однородных задач, отличающихся только сюжетом и числами, чтобы не превратить решение задач в решение по шаблону, по трафарету.

Чтобы научить детей распознавать за различной внешней формой одинаковую математическую структуру задачи данного типа, нужно уделять большое внимание варьированию структуры задачи, изменению формулировки задачи, введению в задачи данного типа дополнительных условий.

6. Изучая новые типы задач, нужно периодически возвращаться к пройденным типам и повторять их. При повторении полезно сравнивать и сопоставлять задачи различных типов, содержащие некоторые сходные элементы в условии.

7. Решение группы задач данного типа полезно завершать доступными детям выводами и обобщениями, в которых подчёркивается, что общего было во всех решённых задачах, чем отличались эти задачи одна от другой, каков был способ или ход решения этих задач.

8. В завершение работы над данным типом задач полезно предлагать учащимся самим составлять аналогичные задачи. Составление задач самими учащимися помогает им более глубоко понять и усвоить структуру задач, их условия, соотношения вводимых в задачу величин; для учителя же правильно составленная задача служит лучшим показателем того, что данный тип задач ученик понимает и решать их умеет.

9. Сформировавшееся у детей понятие о типе задачи может найти своё закрепление в «термине», в наименовании типа задач. Наименование типа должно быть вполне доступно пониманию детей и отвечать арифметической сущности задачи (не вульгаризируя её). Наименование может быть дано не в начале, а только в результате работы над задачей, после осознания учащимися основного приёма решения.

Допустимы такие названия: «Задачи, решаемые приведением к единице», «Задачи, решаемые двукратным приведением к единице» (сложное тройное правило), «Задачи на неравное деление, в которых одно число в несколько раз больше другого» (задачи на нахождение чисел по их сумме и кратному отношению), «Задачи на встречное движение», «Задачи на вычисление времени» и т. д. Неуместны в начальной школе термины: «пропорциональный», «пропорциональное деление», «кратное отношение» и т. п.

Дадим далее краткую характеристику каждого типа задач, расположив их по группам, и покажем применение вышеуказанных принципов при их решении.

1. Задачи с пропорциональными величинами: на простое тройное правило, на пропорциональное деление, на сложное тройное правило.

Главное значение решения задач этой группы состоит в том, что при решении их получает своё практическое применение пропорциональная зависимость величин, та зависимость, которая является наиболее распространённой в мире природы и практической деятельности человека. На конкретных жизненных примерах дети знакомятся с тем, что при увеличении или уменьшении одной величины другая величина, связанная с ней, увеличивается или уменьшается во столько же раз. Так у ребёнка накапливаются конкретные представления, которые далее — в VI классе — будут обобщены в понятие пропорциональности величин. В соответствии с характером этих задач в рассуждениях, сопутствующих их решению, должна ярко подчёркиваться пропорциональная зависимость данных в ней величин.

Задачи на простое тройное правило.

Эти задачи в начальной школе решаются, в зависимости от характера числовых данных, тремя разными способами: способом прямого приведения к единице, способом обратного приведения к единице и способом отношений.

Первый и второй способы применяются в тех случаях, когда в кратном отношении находятся значения разных величин, а третий способ применяется тогда, когда в кратном отношении находятся значения одной и той же величины. При всех способах решения учащиеся пользуются одним и тем же способом рассуждения, вскрывающим пропорциональную зависимость величин.

Иллюстрация к задаче:

Рис. 12.

Способ прямого приведения к единице.

Задача: «За 3 карандаша уплатили 36 коп. Сколько стоят 5 таких карандашей?»

Краткая запись условия задачи:

3 кар.—36 коп.
5 » — ?

Разбор задачи. Чтобы решить вопрос задачи, надо знать, сколько стоит 1 карандаш. Чтобы узнать, сколько стоит 1 карандаш, надо знать, сколько карандашей было куплено (3) и сколько за них уплатили (36 коп.). Оба эти числа в задаче имеются.

Рассуждения при решении задачи. Если 3 карандаша стоят 36 коп., то 1 карандаш стоит в 3 раза меньше (36 коп. : 3 = 12 коп.). Если 1 карандаш стоит 12 коп., то 5 карандашей стоят в 5 раз больше (12 коп. $\times$ 5 = 60 коп.).

Эти суждения весьма существенны, так как в них находит своё выражение пропорциональная зависимость между стоимостью и количеством товара.

Числовая формула решения:

$$36 : 3 \times 5 = 60.$$

Способ обратного приведения к единице.

Задача. «За 3 метра полотна уплатили 36 руб. Сколько метров полотна можно купить на 96 рублей?»

В решении этой задачи находит своё применение деление на равные части и деление по содержанию. Решая эту задачу, ученик должен рассуждать так:

Если 3 *м* стоят 36 руб., то 1 *м* стоит в 3 раза меньше, т. е.

36 руб. : 3 = 12 руб.

Если 1 *м* стоит 12 руб., то на 96 руб. можно купить столько метров полотна, сколько раз 12 руб. повторится (содержится) в 96 руб. Чтобы узнать, сколько раз 12 руб. содержатся в 96 руб., нужно 96 разделить на 12:

96 руб. : 12 руб. = 8 (*м*)

Ответ: На 96 руб. можно купить 8 *м*.

Числовая формула решения:

$$96 : (36 : 3) = 8.$$

Способ отношений.

(IV кл.)

В предыдущей задаче число карандашей и их стоимость выражены числами, кратными между собой. Но если эти данные выражены числами, не делящимися нацело, то такая задача в целых числах не может быть решена способом приведения к единице. В таком случае при известных условиях может быть применён способ отношений (условие: числовые значения одной и той же величины должны быть кратны друг другу).

Задача: «На 3 детских рубашки идёт 7 *м* материи. Сколько метров материи требуется на 12 таких рубашек?»

Краткая запись условия задачи:

3 рубашки — 7 *м*
12 » — x *м*

Иллюстрация к условию задачи:

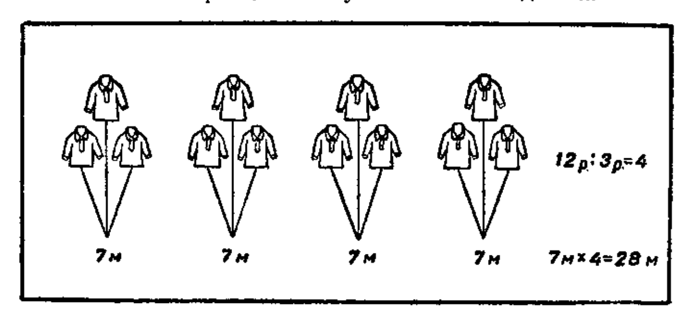


Рис. 13.

Решение задачи путём составления таблицы

3 рубашки — 7 *м*
3 » — 7 *м*
3 » — 7 *м*
3 » — 7 *м*

12 рубашек — 28 *м*

В решении этих задач находит яркое выражение прямая пропорциональная зависимость между величинами: в данном случае между количеством рубашек и количеством материи. Решая эту задачу, ученик рассуждает примерно так: «В задаче требуется узнать, сколько материи пойдёт на 12 рубашек. Мы знаем, что чем больше рубашек, тем больше требуется материи. Во сколько раз больше рубашек, во столько раз больше нужно и материи. 12 рубашек больше 3 рубашек в 4 раза. Следовательно, и материи потребуется в 4 раза больше».

План и решение задачи.

1. Во сколько раз 12 рубашек больше 3 рубашек?

12 руб. : 3 руб. = 4

2. Сколько метров материи требуется на 12 рубашек?

7 *м* × 4 = 28 *м*

Ответ: на 12 рубашек требуется 28 *м*.

Числовая формула решения:

$$7 \times (12 : 3) = 28.$$

Понимание способа решения и ход рассуждения облегчаются схематической записью условия, наглядными пособиями в форме рисунка и таблицы.

Для упражнений очень полезно устное решение задач этого типа в форме заполнения таблиц. Так, задача «3 яблока стоят 2 руб. Сколько рублей стоят 6 яблок? 9 яблок? 12 яблок? 15 яблок? 18 яблок?» может быть предложена для решения и записи в такой форме:

Количество яблок	Их стоимость
3 шт.	2 руб.
6 »	?
9 »	?
12 »	?
15 »	?
18 »	?

Решение задачи «Поезд прошёл 36 *км* за 48 мин. Во сколько минут он прошёл 18 *км*? 12 *км*? 9 *км*? 6 *км*? 3 *км*?» может быть дано в следующей форме:

Расстояние	Время
36 *км*	48 мин.
18 »	?
12 »	?
9 »	?
6 »	?
3 »	?

Переписав эти таблицы в свои тетради, учащиеся производят вычисления и вместо знака вопроса пишут соответствующие числа.

Полезно решать такие задачи, которые могут быть решены и способом приведения к единице и способом нахождения отношений. Например: «За 4 часа поезд прошёл 160 *км*. Какое расстояние пройдёт поезд за 12 часов (при той же скорости в час)?»

Задачи на пропорциональное деление.
(III кл.)

По форме анализа и по типу рассуждения эти задачи близко примыкают к задачам на простое тройное правило.

Задача: «Два землекопа за рытьё канавы получили 90 руб. Один вырыл 4 *м*, другой 5 *м*. Сколько рублей должен получить каждый землекоп?»

Краткая запись условия задачи:

1-й — 4 *м* 2-й — 5 *м*	90 руб.	Сколько рублей получил	↗ первый землекоп? ↘ второй землекоп?

Иллюстрация к условию задачи:

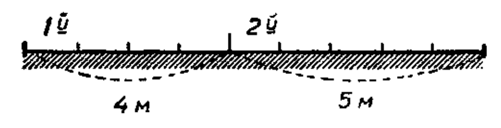


Рис. 14.

Разбор задачи. Чтобы узнать, сколько рублей получил первый землекоп, надо знать, сколько метров он вырыл (4 *м*) и по сколько рублей платили за один метр (?). Чтобы узнать, сколько рублей платили за один метр, надо знать, сколько всего рублей уплатили за работу (90 руб.) и сколько всего метров вырыли (?). Чтобы узнать, сколько всего метров вырыто, надо знать, сколько вырыл первый землекоп (4 *м*) и сколько вырыл второй землекоп (5 *м*). Всё это в задаче дано. Отсюда вытекает следующее решение:

1. Сколько метров канавы вырыли оба землекопа?

$$4\ м + 5\ м = 9\ м$$

2. Сколько рублей платили за рытьё канавы в 1 *м*?

$$90\ руб. : 9 = 10\ руб.$$

3. Сколько рублей получил первый землекоп?

$$10\ руб. \times 4 = 40\ руб.$$

4. Сколько рублей получил второй землекоп?

$$10\ руб. \times 5 = 50\ руб.$$

Ответ: первый землекоп получил 40 руб., второй — 50 руб.

Обратная задача на пропорциональное деление: «Два землекопа вырыли канаву длиной в 18 *м*. Один землекоп получил за свою работу 40 руб., другой — 32 руб. Сколько метров канавы вырыл каждый землекоп?»

Разбор задачи. Чтобы ответить на вопрос (или, точнее, на вопросы задачи), надо знать: 1) Сколько рублей получил каждый землекоп и 2) сколько рублей платили за 1 *м*. Первое известно (40 руб. и 32 руб.). Неизвестно, сколько платили за рытьё 1 *м* канавы.

Чтобы узнать, сколько платили за 1 *м*, достаточно знать: 1) сколько метров вырыли и 2) сколько уплатили за всю работу. Первое известно (18 *м*). Второе прямо не дано, но его можно легко найти, так как в задаче сказано, сколько рублей получил каждый землекоп в отдельности (40 руб. и 32 руб.).

Отсюда вытекает следующий план и решение задачи:

1) Сколько рублей получили оба землекопа вместе?

$$40\ руб. + 32\ руб. = 72\ руб.$$

2) Сколько стоило рытьё 1 *м* канавы?

$$72\ руб. : 18 = 4\ руб.$$

3) Сколько метров вырыл первый землекоп?

40 руб. : 4 руб. = 10 (*м*).

4) Сколько метров вырыл второй землекоп?

32 руб. : 4 руб. = 8 (*м*).

В предыдущих задачах требовалось данное число разделить на части пропорционально д в у м числам. Но в ряде задач приходится делить данное число пропорционально т р ё м числам и более.

Возьмём задачу: «Три столяра получили за изготовление табуретов 1 165 руб. Первый столяр сделал 80 табуретов, второй 78 и третий 75. Сколько денег должен получить каждый столяр?»

Разбирая задачу, надо подчеркнуть, что заработок зависит от продукции: кто больше сделал, тот больше и получит. Для решения задачи надо знать, сколько платили столяру за 1 табурет, а для этого нужно знать, сколько всего табуретов сделали и сколько рублей за них уплачено. Последнее известно из условия задачи (1 165 руб.), а первое можно найти, сложив 80, 75 и 78.

Более сложными задачами этого типа являются такие задачи, в которых требуется разделить данное число пропорционально двум рядам чисел.

Например: «Две машинистки за переписку рукописи получили 284 руб. Одна из них работала 9 час., переписывая в час по 8 страниц, другая работала 7 час., переписывая в час по 10 страниц. Сколько заработала каждая машинистка?»

При разборе задачи надо установить, что в конечном счёте заработок машинисток зависит от числа напечатанных ими страниц. Кто напечатал страниц больше, тот и получит больше. Можно ли узнать, сколько страниц напечатала каждая машинистка? Когда будет известно количество страниц, что ещё нужно знать, чтобы определить заработок (сколько платили за страницу). Как это узнать? Ставя вопросы в такой последовательности, учитель подведёт учащихся к составлению плана решения этой задачи.

Задачи на сложное тройное правило.

(IV кл.)

Задачи этого типа являются дальнейшим развитием и усложнением задач на простое тройное правило.

Усложнение состоит в том, что в них искомой является величина, находящаяся в пропорциональной зависимости не от одной (как в задачах на простое тройное правило), а от н е с к о л ь к и х других величин. В начальной школе эти задачи решаются также приведением к единице, применяемым несколько раз, в зависимости от количества данных в задаче.

Чтобы облегчить учащимся понимание способа решения этих задач, нужно предварительно объяснить детям этот способ на простейших задачах этого типа, в которых некоторые величины выражены единицей. Например:

З а д а ч а: «Трём лошадям требуется на 10 дней 240 *кг* сена. Сколько сена требуется 1 лошади на 1 день?»

Запись условия задачи:

3 лош. 10 дн. — 240 *кг* сена
1 лош. 1 дн. — *x* » »

З а д а ч а. «Одной лошади на 1 день требуется 8 *кг* сена. Сколько сена потребуется 5 лошадям на 7 дней?»

Краткая запись условия задачи:

1 лош. 1 день — 8 *кг* сена
5 » 7 » — *x* » »

При решении первой задачи устанавливаем, что количество сена зависит от двух величин — от количества лошадей и от количества дней: чем больше лошадей, тем больше требуется сена и, наоборот, чем меньше лошадей, тем меньше требуется сена. Такая же зависимость существует и между количе-

ством дней и количеством требуемого сена. В задаче нужно перейти от трёх лошадей к одной лошади, от 10 дней к одному дню. Произведём этот переход постепенно, поставив следующие вопросы: «Сколько потребуется сена о д н о й лошади на 10 дней?» (Одной лошади потребуется сена в 3 раза меньше.) «Сколько сена потребуется одной лошади на 1 день?» (На один день потребуется сена в 10 раз меньше.)

1 лош. 10 дн.— 240 *кг* : 3 = 80 *кг*;
1 лош. 1 дн.— 80 *кг* : 10 = 8 *кг*.

После этого даётся обычная задача этого типа, где приведение к единице является промежуточным звеном в решении.

З а д а ч а: «В 3 лампах за 4 дня сгорело 25 *л* керосина. Сколько керосина потребуется для 5 ламп на 6 дней?»

Запись условия:

3 лампы 4 дн.— 24 *л*
5 » 6 » — *x л*

Прежде чем перейти к 5 лампам и 6 дням, нужно узнать, сколько керосина сгорело в о д н о й лампе в о д и н день.

Решение:

1 лампа 4 дня . . . 24 *л* : 3 = 8 *л*
1 » 1 день . . 8 *л* : 4 = 2 *л*
5 ламп 1 » . . 2 *л* × 5 = 10 *л*
5 » 6 дней . . 10 *л* × 6 = 60 *л*

При дальнейшем решении задач этого типа запись чисел левого столбика опускается, рассуждения производятся устно, и запись принимает следующий вид:

1. Сколько керосина сгорает в одной лампе за 4 дня?

24 *л* : 3 = 8 *л*

2. Сколько керосина сгорает в одной лампе в один день?

8 *л* : 4 = 2 *л*

3. Сколько керосина сгорает в 5 лампах в 1 день?

2 *л* × 5 = 10 *л*

4. Сколько керосина потребуется для пяти ламп на 6 дней?

10 *л* × 6 = 60 *л*

О т в е т: 60 *л*.

Числовая формула решения: 24 : 3 : 4 × 5 × 6 = 60.

2. Задачи на нахождение неизвестного по двум разностям и задачи, решаемые способом исключения одной из величин.

Задачи этих типов имеют некоторое сходство с задачами предыдущей группы; это также задачи с пропорциональными величинами; некоторое сходство есть у них и в способах решения. Но по характеру анализа и по типу рассуждения эти задачи резко отличаются от предыдущих задач.

Анализ задач этой группы основывается на установлении причинно-следственной связи между данными в задаче величинами и на выводах, вытекающих из этой связи. Рассмотрим конкретные задачи этих типов.

Задачи на вычисление неизвестного по двум разностям.

Это очень ценный вид задач для математического развития учащихся. Эти задачи заставляют учащихся фиксировать внимание на числовых данных, сравнивать их между собой и на основе этого сравнения делать простейшие умозаключения, приводящие к отысканию способа решения задачи.

Возьмём, например, следующую задачу этого типа: «Один самолёт был в воздухе 7 час., другой 4 часа. Первый самолёт пролетел больше второго на 1 200 *км*. Какое расстояние пролетел каждый самолёт, если они летели с одинаковой скоростью?»

Краткая запись условия задачи:

1-й — 7 час. 2-й — 4 час.	на 1 200 *км* больше	Какое расстояние пролетел	↗1-й самолёт? ↘2-й самолёт?

Анализируя задачу, легко установить, что для решения её надо знать: 1) скорость самолётов и 2) время полёта.

Время полёта в задаче дано: 7 час. и 4 часа. Скорость не дана, её надо найти. При чтении второй фразы из условия задачи: «Первый самолёт пролетел больше второго на 1 200 *км*», возникает вопрос, почему при одинаковой скорости полёта всё же получились разные расстояния, почему именно первый самолёт пролетел большее расстояние. Ответ на этот вопрос даёт первая фраза задачи: «Первый самолёт был в воздухе 7 час., второй — 4 часа». Первый самолёт, оказывается, летел дольше, чем второй, на 3 часа (7 час.— 4 часа).

Так мы установили две разности: 1) разность во времени полёта — 3 часа (7 час.— 4 часа) и 2) разность в расстоянии — 1 200 *км*. На основании этих двух разностей ученик делает умозаключение: «Значит, первый самолёт за 3 часа пролетел 1 200 *км*».

Отсюда легко определяется скорость самолёта в один час, а дальше по скорости и времени вычисляется расстояние, т. е. то, что требуется найти в задаче.

Таким образом, центральным моментом в решении задач этого типа является момент составления вышеуказанного умозаключения. Как ни просто само по себе это умозаключение, оно всё же даётся детям нелегко. К нему надо подвести учащихся на ряде постепенно усложняющихся задач; например:

1. «Ваня купил на 2 карандаша больше, чем Коля, и уплатил за свою покупку на 30 коп. больше. Сколько стоил один карандаш?» (В этой задаче обе разности даны).

2. «Ваня купил 2 карандаша, а Коля 3 карандаша. Коля уплатил за свою покупку на 15 коп. больше. Сколько стоил один карандаш?» (В этой задаче дана только одна разность — разность в стоимости. Другую разность — количества — надо найти).

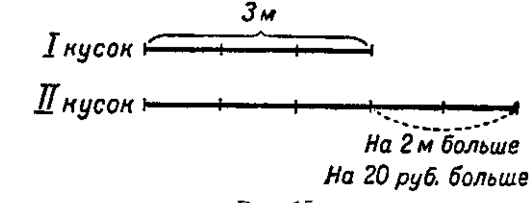


Рис. 15.

3. В одном куске 3 *м* ситца, в другом 5 *м* такого же ситца. Второй кусок стоит дороже первого на 20 руб. Сколько стоит один метр ситца?»

Проиллюстрируем условие этой задачи (см. рис. 15).

Отсюда видно, что 2 лишних метра во втором куске удорожают его на 20 руб. Следовательно, 2 *м* стоят 20 руб. А один метр = 20 руб. : 2 = 10 руб.

4. Изменим вопрос в предыдущей задаче так: «Сколько стоит каждый кусок?», и мы получим задачу данного типа, решаемую четырьмя действиями.

5. Усложним этот тип задач введением так называемой обратной задачи, при решении которой приходится пользоваться делением по содержанию.

Задача: «Один поезд прошёл 600 *км*, другой 720 *км*. Второй поезд был в пути на 3 часа больше, чем первый. Сколько часов был в пути каждый поезд, если они шли с одинаковой скоростью?»

Разбор этой задачи, как и предыдущих, начинается с вопроса — «почему». (Почему второй поезд был в пути больше, чем первый, на 3 часа?») Этот вопрос приведёт учащихся к сравнению данных в задаче расстояний (600 *км*

и 720 *км*), к нахождению второй разности — 120 *км* (720 *км* — 600 *км*=120 *км*) и к нахождению по двум разностям скорости поездов. А дальше по расстоянию и скорости нетрудно определить время нахождения в пути каждого поезда.

Во всех предыдущих задачах одна из разностей являлась данной величиной, другая — определялась на основании числовых данных задачи. Но существуют такие задачи, в которых обе разности выражены неявно и, в свою очередь, являются *искомыми* величинами. Вот пример такой задачи:

«Если ученик купит на все свои деньги 8 тетрадей, то у него останется 20 коп. Для покупки же 15 таких тетрадей у него нехватит 50 коп. Сколько стоит одна тетрадь?»

Сравнивая при разборе задачи обе покупки, можно легко установить, что во второй раз покупается (или предполагается купить) на несколько тетрадей больше и стоимость их на несколько копеек больше.

По разнице количества тетрадей и по разнице их стоимости можно, как это было и в предыдущих задачах, найти цену одной тетради.

Решение задачи:

1) Разность в числе тетрадей при обеих покупках:

15 т.— 8 т.= 7 т.

2) Разность в стоимости 15 и 8 тетрадей:

20 коп. + 50 коп. = 70 коп.

Следовательно, 7 тетрадей стоят 70 коп.

3) Цена одной тетради:

70 коп. : 7 = 10 коп.

Последний вид задачи представляет для учащихся значительные трудности (трудно найти вторую разность, устанавливаемую по избытку и недостатку), поэтому такие задачи можно вводить только в IV классе, в то время как другие разновидности задач этого типа решаются уже в III классе.

Задачи, решаемые способом исключения одной из величин. (IV кл.)

Дальнейшим развитием и усложнением задач на нахождение неизвестного по двум разностям являются задачи, решаемые способом исключения одной из величин. И здесь ключом к отысканию способа решения является установление причинно-следственных связей между изменяющимися величинами при условии временного исключения одной из величин, не влияющей на изменение разности другой величины.

Задача: «Один ученик купил 5 карандашей, 3 тетради и уплатил за это 70 коп. Другой ученик купил по тем же ценам 8 карандашей, 3 тетради и уплатил за эту покупку 94 коп. Сколько стоит один карандаш и сколько стоит одна тетрадь?»

Запишем условие задачи в 2 строчки, чтобы удобно было сопоставлять однородные величины:

5 кар. 3 тетр. 70 коп.
8 кар. 3 тетр. 94 коп. | Сколько стоит ↗ одна тетрадь? ↘ один карандаш?

Анализ задачи: «Из задачи видно, что второй ученик уплатил за свою покупку больше, чем первый. Почему? Очевидно потому, что он больше купил карандашей. Тетради на разницу стоимости не влияют: их куплено одинаковое количество. Если мы узнаем, на сколько карандашей второй мальчик купил больше и на сколько копеек он уплатил больше, то тем самым мы узнаем, сколько копеек стоит этот излишек карандашей, а отсюда легко узнать, сколько стоит один карандаш».

На этом может быть закончена первая часть анализа и решена первая часть задачи:

1) На сколько карандашей второй мальчик купил больше первого?

8 кар. — 5 кар. = 3 кар.

2) На сколько копеек второй мальчик уплатил больше первого?

94 коп. — 70 коп. = 24 коп.

3) Сколько копеек стоит один карандаш?

24 коп. : 3 = 8 коп.

Далее узнаётся стоимость тетради. Для этого берётся первая часть условия задачи и к ней прибавляется новое данное — цена карандаша; получается знакомая ученикам задача. «Один ученик купил 5 карандашей, 3 тетради и уплатил 70 коп. Сколько стоит тетрадь, если карандаш стоит 8 копеек?» Эта задача подвергается разбору и решается, составляя продолжение первой части:

4) Сколько стоят 5 карандашей?

8 коп. $\times$ 5 = 40 коп.

5) Сколько стоят 3 тетради?

70 коп. — 40 коп. = 30 коп.

6) Сколько стоит одна тетрадь?

30 коп. : 3 = 10 коп.

Ответ: тетрадь стоит 10 коп.; карандаш — 8 коп.

Не трудно заметить, что и в этой задаче исходным моментом для её анализа и отыскания хода решения служит вопрос: «Почему второй ученик уплатил за свою покупку больше, чем первый?»

Практика в решении таких задач поможет ученикам «узнавать» данный тип задач и производить их анализ самостоятельно.

3. Задачи на нахождение чисел по их сумме и разности, по их сумме и кратному отношению.

Особую группу задач в начальной школе составляют задачи на деление в разностном и кратном отношении, т. е. задачи на нахождение чисел по их сумме и разности и задачи на нахождение чисел по их сумме и кратному отношению. В школьной практике и в методической литературе принято рассматривать сначала задачи на нахождение чисел по их сумме и разности, а потом задачи на нахождение чисел по их сумме и кратному отношению. Эти типы задач рассматриваются независимо один от другого, без установления связи между ними по способу решения. Такой порядок создаёт большие трудности при изучении этих типов задач, особенно первого из них. Общеизвестно, с каким трудом даётся детям усвоение схемы рассуждения при решении задач на нахождение двух чисел по их сумме и разности, какие трудности приходится преодолевать ребёнку при формулировке первого вопроса задачи. («Сколько книг было бы на двух полках, если бы на второй полке было книг столько, сколько на первой?») Этих трудностей можно было бы избежать, если бы задачи обоих этих типов решать с помощью понятия «части» и сначала научить решать задачи на нахождение двух чисел по их сумме и кратному отношению, на которых у детей формируется понятие части,

а затем использовать это понятие и при решении задач на нахождение чисел по их сумме и разности.

Рассмотрим сначала те способы решения, которые практикуются в школе, а затем покажем, как можно было бы внести в приёмы решения задач этих типов некоторое единство и тем самым облегчить те трудности, о которых говорилось выше.

Задачи на нахождение двух чисел по их сумме и разности.

Способ решения этих задач устанавливается через подготовительные упражнения примерно следующего содержания:

«Раздать 10 карандашей двум ученикам так, чтобы один ученик получил больше другого на 2 карандаша. Как будем делить карандаши?»

После ряда попыток принимается такой способ выполнения задания:

а) сначала 2 карандаша откладываются в сторону;

б) затем остаток (8) делится поровну,

в) и наконец, 2 карандаша, отложенные в сторону, прибавляются к 4 карандашам одного из учеников.

«Запишем,— говорит учитель,— то, что мы делали». На доске появляется запись:

1. 10 кар.— 2 кар.= 8 кар. (откладывание 2 карандашей в сторону).

2. 8 кар. : 2 = 4 кар. (деление остатка (8) пополам).

3. 4 кар. + 2 кар. = 6 кар. (прибавление 2 отложенных в сторону карандашей к 4 карандашам одного из учеников).

После этого ученикам даётся для самостоятельного выполнения задание: разложить 20 палочек (палочки должны быть заранее заготовлены) на две кучки так, чтобы в правой кучке было на 4 палочки больше, чем в левой. Ученики выполняют эту операцию по образцу деления карандашей и записывают её.

Из выполнения конкретных заданий вытекает способ решения задач данного типа. Чтобы учащиеся лучше осмыслили способ решения, учитель ставит такие вопросы: «Почему мы не делили сразу 10 карандашей, 20 палочек на две равные части?» (Потому, что в задачах требовалось делить не на равные части.) «Зачем мы сначала откладывали в сторону (отнимали) 2 карандаша, 4 палочки?» (Чтобы получить число, которое можно делить пополам.)

После этого предлагается задача этого типа в её обычной формулировке, например: «Двум покупателям продано 17 *м* материи, причём одному покупателю продано на 3 *м* больше, чем другому. Сколько метров материи продано каждому покупателю?»

Задача иллюстрируется полоской, изображающей 17 *м* материи (1 клетка — 1 *м*). Чтобы решить задачу, надо разрезать полоску на две части так, чтобы в одной части было на 3 *м* (на 3 клетки) больше, чем в другой. Как это сделать? Сначала отделим те 3 *м*, которые являются лишними у первого покупателя по сравнению со вторым (останется 14 *м*). Дальше то, что останется (14 *м*), нужно разделить пополам (получится по 7 *м*). Итак, второму покупателю продано 7 *м*, а первому 7 *м* и ещё 3 *м*, т. е. 10 *м*. Записывая каждое действие, получим:

1) Сколько метров материи продали бы двум покупателям, если бы первому продали столько, сколько второму?

$$17\ м - 3\ м = 14\ м$$

2) Сколько метров материи продали второму покупателю?

$$14\ м : 2 = 7\ м$$

3) Сколько метров материи продали первому покупателю?

$$7\ м + 3\ м = 10\ м$$

Ответ: первому покупателю продали 10 *м*, второму 7 *м*.

Проверка: $10\ м + 7\ м = 17\ м$

$10\ м$ больше $7\ м$ на $3\ м$.

Усложнёнными задачами этого типа являются такие задачи, в которых даётся сумма трёх чисел с двумя разностями. Например: «В трёх кусках было всего 160 метров сукна, причём во втором куске было на 10 *м* больше, чем в первом, а в третьем на 20 *м* больше, чем во втором. Сколько метров сукна было в каждом куске?»

Здесь дана сумма трёх чисел — 160 и даны две разности: разность первого и второго числа — 10, второго и третьего числа — 20.

Иллюстрацией условия задачи может служить чертёж:

160 м
I кус.
II "
III "
10 м
20 м

Рис. 16.

По данному чертежу легко сравнить длину трёх кусков и установить, что второй кусок больше первого на 10 *м*, а третий больше первого на 30 *м* (10 *м* + 20 *м*), и если уравнять по первому, то нужно отрезать 10 *м* от второго куска и 30 *м* от третьего куска, а всего нужно отрезать 40 *м* (30 *м* + 10 *м*). Отняв 40 *м* от 160 *м*, получим три одинаковых куска, равных по величине первому. Отсюда легко найти длину каждого куска.

Задачи на нахождение двух чисел по их сумме и кратному отношению.

По математическому содержанию эти задачи относятся к задачам на пропорциональное деление. Но по схеме рассуждения, сопровождающего решение, этот тип задач для учащихся начальной школы является качественно иным, чем задачи на пропорциональное деление. В задачах на пропорциональное деление ученик мыслит конкретными величинами, здесь же он имеет дело с отвлечёнными отношениями, здесь у него формируется новое понятие об условной единице — части. В дальнейшем ученик узнает, что задачи на пропорциональное деление включают в себя и задачи на неравное деление, что обе эти задачи имеют одну и ту же арифметическую основу. Но в III классе, где впервые даётся знакомство с этим типом задач, такое обобщение преждевременно.

Решение задач этого типа нужно начинать с таких задач, в условии которых фигурируют «части», например:

«Приготовили сплав из олова и свинца весом в 300 *г*. Олова в сплаве 1 часть, а свинца 5 таких частей. Сколько в сплаве свинца и олова в отдельности?»

Обозначив части условно кружками, получим (рис. 17):

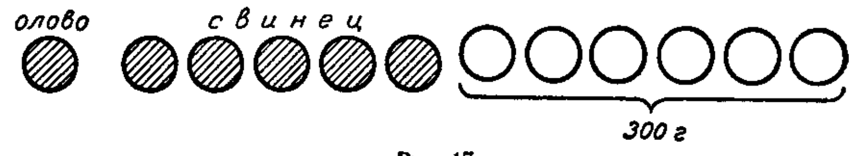


Рис. 17.

Легко установить, что в сплав входит всего 6 равных частей, которые составляют 300 *г*. Отсюда, на одну часть приходится $300\ г : 6 = 50\ г$. Значит, олова было 50 *г*, а свинца 5 раз по 50 *г*, т. е. $50\ г \times 5 = 250\ г$.

Чтобы перевести учащихся с «частей» на обычную формулировку та-

ких задач, нужно проделать следующие упражнения: «Если олова 1 часть, а свинца 5 частей, то во сколько раз больше взято свинца, чем олова?» (В 5 раз больше.) «А если бы было взято олова 1 часть, а свинца 3 части, тогда во сколько раз свинца больше, чем олова?» (В 3 раза.) «Допустим, что свинца было в 6 раз больше, чем олова,— сколько частей взяли олова и свинца?» (Олова 1 часть, свинца 6 частей.) «В роще росли берёзы и ели; берёз было в 4 раза больше, чем елей. Выразите в частях число елей и берёз». (Елей 1 часть, берёз 4 части.)

После таких упражнений даётся задача о сплаве в обычной формулировке:

«Приготовили сплав из олова и свинца весом в 300 *г*, причём свинца взяли в 5 раз больше, чем олова. Сколько граммов олова и свинца взято в отдельности?»

Разбор задачи. В данной задаче олова и свинца взято не поровну: свинца взято в 5 раз больше, чем олова. Это значит, что олова взята одна часть, а свинца 5 таких частей. А всего в сплаве 6 равных частей, и составляют они по весу 300 *г*. Отсюда можно узнать, сколько граммов приходится на одну часть, или сколько взято олова, и сколько граммов приходится на 5 частей, или сколько взято свинца.

Решение задачи оформляется так:

Олова — 1 часть,
Свинца — 5 частей.

1. Сколько всего равных частей составляют 300 *г*?

$$1 \text{ ч.} + 5 \text{ ч.} = 6 \text{ ч.}$$

2. Сколько олова в сплаве?

$$300 \text{ г} : 6 = 50 \text{ г}$$

3. Сколько свинца в сплаве?

$$50 \text{ г} \times 5 = 250 \text{ г}$$

Ответ: в сплаве олова 50 *г*, свинца 250 *г*.

Проверка:

$$50 \text{ г} + 250 \text{ г} = 300 \text{ г}.$$

Решение группы таких задач можно завершить обобщением примерно в следующей форме: «Во всех решённых нами задачах требовалось найти два числа (показать на примере задач). При этом давалась в задаче сумма этих двух чисел (показать на примере задач) и указывалось, во сколько раз одно число больше другого. Для отыскания этих двух чисел мы принимали меньшее число за одну часть, а большее — за несколько частей (смотря по тому, во сколько раз оно больше меньшего). Потом находили сумму частей и определяли, чему равняется одна часть и несколько частей».

Усложнение задач этого типа может идти по линии увеличения количества слагаемых и кратных отношений между ними. Например: «В магазине за 3 дня продано 1 026 *м* мануфактуры. Во второй день продано в 2 раза больше, чем в первый; в третий день — в 3 раза больше, чем во второй. Сколько метров мануфактуры продано в каждый день отдельно?»

В этой задаче дана сумма трёх чисел и два кратных отношения. В таких случаях нужно найти меньшую величину и принять её за одну часть.

Итак, пусть в первый день продана 1 часть; тогда по условию задачи во второй день продано 2 таких части, а в третий день — 6 таких частей. Дальше задача решается по образцу предыдущей.

Значительное усложнение в решении задач этого типа вносит то обстоя-

тельство, что в условии задачи нередко сравнивается **меньшая** величина с большей и указывается, во сколько раз одна величина **меньше** другой. Например:

«В трёх кусках материи было всего 96 *м*; причём в первом куске было в 3 раза меньше, чем во втором, и в 4 раза меньше, чем в третьем куске. Сколько метров материи было в каждом куске?»

Из условия задачи видно, что наименьший кусок — первый кусок. Обозначим его через одну часть. Возникает вопрос, сколько же частей приходится на второй кусок. Чтобы получить ответ на этот вопрос, произведём **обратное** сравнение, т. е. сравним второй — больший кусок с первым. Если первый кусок **меньше** второго в 3 раза, то это значит, что второй кусок **больше** первого в 3 раза. Обозначив первый кусок через одну часть, мы должны обозначить второй кусок через 3 части. Так же сравниваем третий кусок с первым и обозначаем его через 4 части. Дальше решение этой задачи ничем не отличается от предыдущей.

Второй способ решения задач на нахождение двух чисел по их сумме и разности. После того как у учащихся сформируется понятие о части, это понятие может быть использовано при решении задач на нахождение двух чисел по их сумме и разности. Покажем на примере, как решаются эти задачи на основе понятия о части.

Задача: «Двум покупателям продано 15 *м* ситца. Второму на 3 *м* больше, чем первому. Сколько метров ситца продано каждому покупателю?»

Разбор задачи. Учитель. Какому покупателю продано меньше? Какому больше?

Ученик. Первому продано меньше. Второму — больше.

Учитель. Изобразим материю, проданную первому покупателю, в виде полоски. Предположим, что первому покупателю продана **одна часть** материи. Что в таком случае можно сказать о материи второго покупателя?

Ученик. Второму покупателю продано столько же и ещё 3 *м* или продана одна часть и ещё 3 *м*.

Учитель рисует на доске полоску, изображающую покупку первого и второго покупателя, и записывает числовые данные:

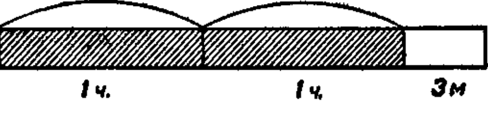


Рис. 18.

Всего 15 *м*

1-му покупателю — 1 часть; 2-му покупателю — 1 часть и 3 *м*.

Сколько продано ↗ первому покупателю? ↘ второму покупателю?

1. Сколько всего равных частей в 15 *м*?

1 ч. + 1 ч. = 2 ч.

2. Сколько метров приходится на две равные части?

15 *м* — 3 *м* = 12 *м*

3. Сколько метров продано первому покупателю?

12 *м* : 2 = 6 *м*

4. Сколько метров продано второму покупателю?

6 *м* + 3 *м* = 9 *м*

Ответ: первому покупателю продано 6 *м*, второму 9 *м*.

П р о в е р к а:

$$6\ м + 9\ м = 15\ м$$
$$9\ м \text{ больше } 6\ м \text{ на } 3\ м$$

Формула решения: 1-му покупателю $(15 - 3) : 2 = 6$;
2-му покупателю $(15 - 3) : 2 + 3 = 9$.

Усложнёнными задачами этого типа являются такие задачи, в которых нужно делить данное число на 3 неравные части.

Например: «В трёх кусках было 160 *м* сукна. Во втором куске было на 10 *м* больше, чем в первом, а в третьем на 20 *м* больше, чем во втором. Сколько метров сукна было в каждом куске?»

И л л ю с т р а ц и я условия задачи: рис. № 16.

Р а з б о р задачи. В этой задаче число 160 нужно разделить на 3 неравные части. Самый меньший кусок — это первый кусок. Предположим, что в этом куске 1 часть всего сукна. Тогда во втором куске была 1 часть и 10 *м*, а в третьем куске — 1 часть и 30 *м*. А всего в трёх кусках было 3 равных части и ещё 40 *м* (30 *м* + 10 *м*). Отсюда легко узнать, сколько метров приходится на 3 части, а потом и на 1 часть.

Решение задачи оформляется так:

в 1-м куске — 1 часть
во 2-м куске — 1 часть и 10 *м*
в 3-м куске — 1 часть и 10 *м* и 20 *м*.

1. Сколько всего равных частей в трёх кусках?

$$1\ ч. + 1\ ч. + 1\ ч. = 3\ ч.$$

2. Сколько метров приходится на излишки?

$$10\ м + 10\ м + 20\ м = 40\ м$$

3. Сколько метров приходится на 3 равных части?

$$160\ м - 40\ м = 120\ м$$

4. Сколько метров в первом куске?

$$120\ м : 3 = 40\ м$$

5. Сколько метров во втором куске?

$$40\ м + 10\ м = 50\ м$$

6. Сколько метров в третьем куске?

$$50\ м + 20\ м = 70\ м$$

О т в е т: в первом куске — 40 *м*, во втором — 50 *м*, в третьем — 70 *м*.

П р о в е р к а:

$$40\ м + 50\ м + 70\ м = 160\ м.$$

В такой именно трактовке полезно давать учащимся начальной школы решение задач на нахождение чисел по их сумме и разности, по их сумме и кратному отношению. Эта трактовка имеет следующие преимущества перед общеизвестными приёмами их решения:

1) Обе задачи при данной трактовке сближаются между собой, одна из них помогает решению другой в то время, как при принятом в настоящее время приёме их решения эти задачи выступают как разные задачи, не имеющие между собой ничего общего.

2) При решении задачи на нахождение двух чисел по их сумме и разности способом введения «части» ученик освобождается от трудной и непосильной для него формулировки первого вопроса: «Сколько метров про-

дали бы двум покупателям, если бы второму покупателю продали столько, сколько первому?»

3) Использование понятия «части» сближает арифметический способ решения этой задачи с алгебраическим, а также сближает решение задач на нахождение трёх и четырёх чисел по их сумме и разности с решением задач на нахождение двух чисел по их сумме и разности.

При такой трактовке задачи на нахождение двух чисел по их сумме и разности должны следовать за решением задач на нахождение двух чисел по их сумме и кратному отношению.

4. Задачи на движение.

Движение является темой для самых разнообразных задач, решаемых разными способами и относящихся к разным типам. Но наряду с этим существует и самостоятельный тип задач на движение. Он объединяет собой такие задачи на движение, которые решаются на основании зависимости между тремя величинами, характеризующими движение, — скоростью, расстоянием и временем — и в которых эти величины выступают как направленные величины. Направленными же эти величины являются в задачах: а) на встречное движение, б) на движение двух тел в противоположном направлении и в) на движение двух тел в одном направлении. Эти три вида задач и составляют особую группу задач на движение.

Что является основанием для выделения этих задач в особую группу?— Специфика направленных величин, равномерное их изменение, тесная связь пространства и времени. Решение этих задач способствует усвоению зависимости между скоростью, расстоянием и временем и развитию у детей пространственных представлений. При разборе этих задач вполне применим аналитико-синтетический метод разбора в той его форме, в какой он используется при анализе обыкновенных арифметических задач.

Особое значение имеют при решении этих задач графические образы. Графические иллюстрации должны сопутствовать решению этих задач. Нужно стремиться к тому, чтобы ученики не только понимали эти иллюстрации, но и умели самостоятельно проиллюстрировать решение задачи на движение.

Задачи на встречное движение.

Так как в задачах на движение участвуют 3 величины и каждая из них может быть искомой, то различают 3 вида задач на встречное движение: один, в котором по данному времени и скоростям определяется путь; другой, в котором по данному пути и скоростям определяется время, и третий, в котором по данному пути и времени определяется скорость.

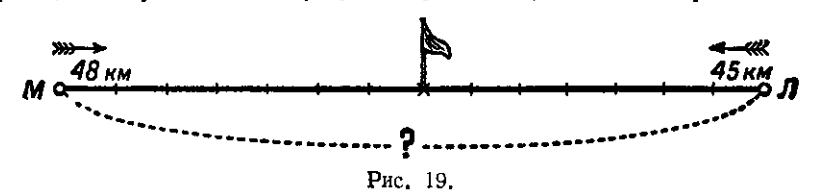


Рис. 19.

Перед началом решения задач на движение выясняются на конкретных примерах понятия: «встречное движение», «одновременное и разновременное начало движения», «скорость», «путь». Выясняется также и то, что если два тела начали двигаться навстречу друг другу одновременно, то к моменту встречи они были в пути одинаковое время; в момент встречи оба тела проходят всё расстояние между теми пунктами, откуда началось движение. Всё это можно показать на движении самих учащихся в классе.

З а д а ч а: «Из Москвы и Ленинграда вышли навстречу друг другу одновременно два поезда. Московский поезд проходил в час 48 *км*, а ленин-

градский — 45 *км*. Через 7 час. поезда встретились. Найти расстояние между Москвой и Ленинградом».

Иллюстрация условия задачи — на рис. 19.

Из чертежа видно, что всё расстояние состоит из двух отрезков, что оно пройдено двумя поездами к моменту встречи; каждый из них шёл 7 час., проходя первый по 48 *км*, а второй по 45 *км* в час. Рассмотрение чертежа приводит к следующему плану и решению:

1. Сколько километров прошёл московский поезд до встречи?

$$48\ км \times 7 = 336\ км$$

2. Сколько километров прошёл ленинградский поезд до встречи?

$$45\ км \times 7 = 315\ км$$

3. Сколько километров от Москвы до Ленинграда?

$$336\ км + 315\ км = 651\ км$$

Второй способ решения этой задачи:

1. Сколько километров проходят оба поезда в один час?

$$48\ км + 45\ км = 93\ км$$

2. Каково расстояние между Москвой и Ленинградом?

$$93\ км \times 7 = 651\ км$$

Этот способ будет нужен, когда учащиеся перейдут к решению задач, в которых требуется по данному расстоянию и данным скоростям определить время встречи.

Задача (на определение времени встречи). «Из Москвы и Тбилиси, расстояние между которыми 3180 *км*, одновременно вышли навстречу друг другу два скорых поезда. Первый поезд проходил по 52 *км*, второй по 54 *км* в час. Через сколько часов поезда встретятся?»

Сделаем чертёж: проведём прямую, обозначим на ней пункты отправления поездов буквами М и Т, укажем стрелками направление движения поездов, обозначим точкой Б место встречи — поближе к М, потому что тбилисский поезд идёт быстрее.

Разбор задачи. Чтобы встретиться, поезда должны пройти всё расстояние, отделяющее Москву от Тбилиси, т. е. 3180 *км*, причём московский поезд пройдёт расстояние от М до Б, а тбилисский от Т до Б. Сколько же часов им понадобится, чтобы встретиться, т. е. чтобы пройти всё расстояние?

За один час, двигаясь навстречу друг другу, они проходят 52 *км* + 54 *км*, иначе говоря, они сближаются на 106 *км*. Пройдёт второй час — и они пройдут ещё 106 *км*, пройдёт третий час — и поезда снова пройдут 106 *км* и т. д. Сколько же часов должны двигаться поезда, чтобы пройти 3180 *км*? Очевидно, столько часов, сколько раз 106 *км* содержатся в 3180 *км*.

План и решение задачи.

1. На сколько километров сближаются в час оба поезда, или сколько километров проходят они в один час?

$$52\ км + 54\ км = 106\ км$$

2. Через сколько часов поезда встретятся?

$$3180\ км : 106\ км = 30\ (час.).$$

Ответ: Поезда встретятся через 30 час.

Проверка: $52\ км \times 30 + 54\ км \times 30 = 3180\ км$

Числовая формула решения: $3180 : (52 + 54) = 30$.

Первый вопрос плана в такой сложной формулировке можно ставить устно; при записи же можно формулировать вопрос проще: «Сколько километров проходят в час оба поезда?»

Задача (на определение скорости): «От Москвы до Киева 855 *км*. Из этих городов вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Московский поезд проходит в час 45 *км*. Сколько километров проходил в час киевский поезд, если они встретились через 9 часов?» (рис. 20).

Разбор задачи на основе чертежа: «Нужно узнать, сколько километров проходил в 1 час киевский поезд. Для этого надо знать время и расстояние, которое он прошёл до встречи. Время известно: 9 час. Расстояние неизвестно, но его можно найти: оно равно всему расстоянию без той

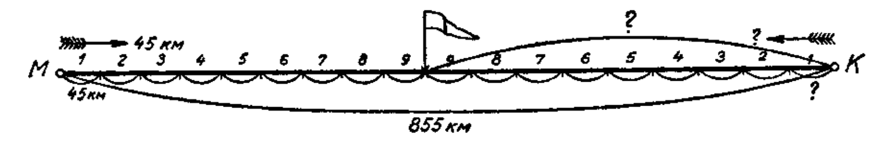


Рис. 20.

части, которая пройдена московским поездом. Общее расстояние известно — 855 *км*, а часть, пройденную московским поездом, можно найти по данному времени и по данной скорости».

Из анализа вытекает следующий план решения задачи:

1) Сколько километров прошёл до встречи московский поезд? (45 *км* $\times$ 9 = 405 *км*.) 2) Сколько километров прошёл до встречи киевский поезд? (855 *км* — 405 *км* = 450 *км*.) 3) Сколько километров проходил в час киевский поезд? (450 *км* : 9 = 50 *км*.)

Второй способ решения этой задачи:

1) Сколько километров проходили в час оба поезда?

855 *км* : 9 = 95 *км*

2) Сколько километров проходил в час киевский поезд?

95 *км* — 45 *км* = 50 *км*

После решения ряда задач на движение (9—12 задач) можно сделать обобщение примерно следующего характера: «Во всех решённых задачах говорилось о встречном движении — поездов, самолётов, велосипедистов и т. д. В этих задачах мы имели дело с расстоянием, скоростью, временем. В одних задачах давались расстояние и время, а требовалось найти скорость; в других задачах давались скорость и время — требовалось найти расстояние; в третьих задачах давались расстояние и скорость — требовалось найти время встречи». Дальше указывается, каким способом решался каждый из трёх видов задач.

Задачи на движение двух тел в противоположных направлениях.

В эту группу входят задачи различной степени сложности и трудности их для учащихся. Отправными, более лёгкими, являются задачи, в которых из одной точки два тела выходят одновременно и движутся в противоположных направлениях; причём искомым является расстояние между этими телами через данный промежуток времени.

Задача: «Со станции одновременно вышли два поезда и идут в противоположных направлениях. Один поезд идёт со скоростью 50 *км* в час, другой — со скоростью 40 *км* в час. На каком расстоянии друг от друга будут эти поезда через 4 часа после своего выхода?»

Иллюстрируем условие задачи:

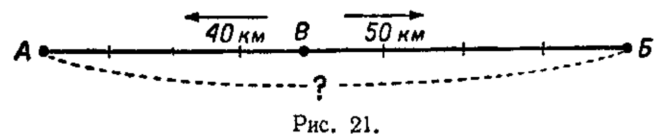


Рис. 21.

Рассмотрение этого чертежа приводит к двум способам решения задачи.
Первый способ: 1) Сколько километров прошёл за 4 часа 1-й поезд?

$$50\ км \times 4 = 200\ км$$

2) Сколько километров прошёл за 4 часа 2-й поезд?

$$40\ км \times 4 = 160\ км$$

3) На каком расстоянии будут поезда друг от друга через 4 часа?

$$200\ км + 160\ км = 360\ км$$

Второй способ: 1) На каком расстоянии будут поезда друг от друга через 1 час?

$$50\ км + 40\ км = 90\ км$$

2) На каком расстоянии будут поезда друг от друга через 4 часа?

$$90\ км \times 4 = 360\ км$$

Сравнивая и оценивая эти два способа, нужно отдать предпочтение второму способу потому что он короче и логически вытекает из вопроса задачи.

Чтобы навести учащихся на этот способ, нужно в первых (подготовительных) задачах этого вида ставить вопросы так: На каком расстоянии будут эти поезда друг от друга через 1 час? через 2 часа? через 3 часа? И т. д.

Более сложными задачами этого вида являются такие задачи, в которых движение начинается из одной точки, но неодновременно: одно тело начинает своё движение раньше, другое позже.

Задача: «Со станции вышел поезд со скоростью 45 *км* в час. Спустя 2 часа, с этой же станции в противоположную сторону вышел другой поезд со скоростью 40 *км* в час. Какое расстояние будет между поездами через 5 часов после выхода второго поезда?»

Иллюстрируем условие задачи:

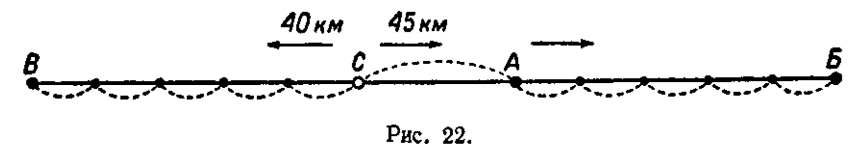


Рис. 22.

На основании анализа и рассмотрения чертежа эта задача может быть решена двумя способами.

Первый способ: 1) На каком расстоянии были поезда к моменту выхода второго поезда?

$$45\ км \times 2 = 90\ км$$

2) На какое расстояние удаляются поезда друг от друга за 1 час?

$$45\ км + 40\ км = 85\ км$$

3) На какое расстояние удалились поезда друг от друга за 5 часов?

$$85\ км \times 5 = 425\ км$$

4) Какое расстояние будет между поездами через 5 часов после выхода второго поезда?

$$90 \text{ км} + 425 \text{ км} = 515 \text{ км}$$

В т о р о й с п о с о б: 1) Сколько часов был в пути первый поезд?

$$2 \text{ часа} + 5 \text{ час.} = 7 \text{ час.}$$

2) Какое расстояние прошёл 1-й поезд за 7 час.?

$$45 \text{ км} \times 7 = 315 \text{ км.}$$

3) Какое расстояние прошёл 2-й поезд за 5 час.?

$$40 \text{ км} \times 5 = 200 \text{ км}$$

4) Какое расстояние будет между поездами через 5 час. после выхода второго поезда?

$$315 \text{ км} + 200 \text{ км} = 515 \text{ км}$$

Оба способа решения являются правильными, однако предпочтение надо отдать первому способу как находящемуся в более тесной логической связи с вопросом задачи.

Ещё более сложными задачами этого вида являются такие задачи, в которых два тела начинают своё движение в противоположном направлении из д в у х р а з н ы х т о ч е к, находящихся на данном расстоянии, и в р а з н о е в р е м я. Решение таких задач требует наличия у учащихся хорошо развитых пространственных представлений, которых может и не быть у учащихся IV класса, поэтому такого рода задачи не обязательны для начальной школы.

Задачи на движение двух тел в одном направлении.

В этих задачах следует различать два варианта: 1) движение начинается одновременно из разных пунктов, лежащих на одной прямой; 2) движение начинается в разное время из одного пункта.

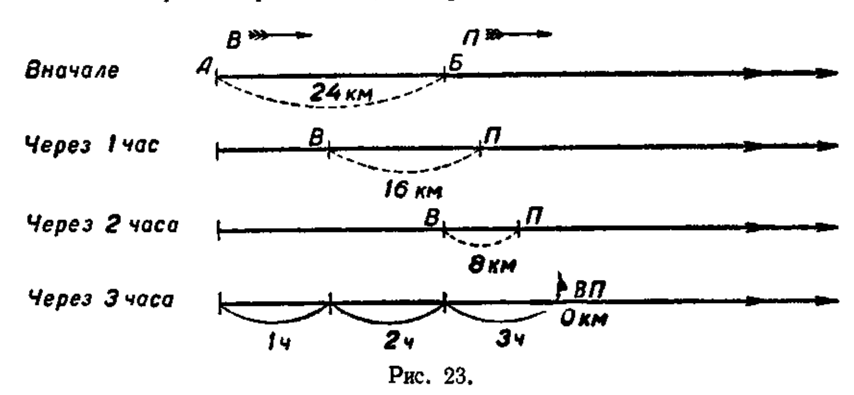


Рис. 23.

З а д а ч а: «Всадник выезжает из пункта *А* и едет со скоростью 12 *км* в час; в это же время из пункта *Б* вышел пешеход, который идёт со скоростью 4 *км* в час. Оба движутся в одном направлении. Через сколько часов всадник догонит пешехода, если расстояние между *А* и *Б* составляет 24 *км*?»

Иллюстрация условия этой задачи (см. рис. 23).

При разборе задачи нужно установить, что всадник догонит пешехода потому, что он едет с большей скоростью. В течение часа он нагоняет пешехода или приближается к нему на 8 *км*. А ему нужно нагнать всего

на 24 км. Сколько же часов для этого потребуется? Очевидно, столько, сколько раз 8 *км* содержатся в 24 *км.*

Пользуясь чертежом, нужно отмечать, в каких точках будут находиться всадник и пешеход через 1 час, через 2 часа, через 3 часа.

План и решение задачи.

1) На сколько километров всадник нагоняет в час пешехода?

12 *км* — 4 *км* = 8 *км*

2) Через сколько часов всадник догонит пешехода?

24 *км* : 8 *км* = 3 (часа).

Ответ: через 3 часа.

Задача: «Из Москвы в 6 час. утра вылетел в Ашхабад почтовый самолёт со скоростью 235 *км* в час. Через 3 часа вслед за ним вылетел скорый самолёт, который делал в час 376 *км.* В котором часу он нагонит почтовый самолёт?»

В этой задаче самолёты вылетают из одного пункта, но в разное время. В предыдущей задаче было указано, на сколько километров всадник должен был нагнать пешехода; в этой же задаче эта величина остаётся неизвестной, но её можно определить, и, когда она будет определена, решение данной задачи будет протекать по тому же плану, как и решение предыдущей задачи.

План и решение.

1) Сколько километров пролетел за 3 часа почтовый самолёт?

235 *км* × 3 = 705 *км*

2) На сколько уменьшается за час расстояние между самолётами?

376 *км* — 235 *км* = 141 *км*

3) Через сколько часов скорый самолёт нагонит почтовый самолёт?

705 *км* : 141 *км* = 5 (час.)

4) Когда вылетел скорый самолёт?

6 час. + 3 час. = 9 час.

5) Когда он нагонит почтовый самолёт?

9 час. + 5 час. = 14 час.

Ответ: В 14 час. или в 2 часа дня.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

МЕТОДИКА УСТНОГО СЧЁТА.

Существуют две системы вычислений: система устных и система письменных вычислений. В основе различения этих систем лежат приёмы вычислений.

Устные приёмы вычислений характеризуются следующим:

Вычисления начинаются с единиц высших разрядов. Приёмы видоизменяются в зависимости от особенностей данных чисел. Если устно выполненное вычисление нужно записать, то оно за-

писывается только в строчку. Промежуточные результаты вычислений удерживаются в памяти, и записывается, если это нужно, лишь окончательный результат.

При письменных вычислениях числа, над которыми выполняются действия, записываются обычно «в столбик». Действия производятся по строго определённым правилам независимо от особенностей данных чисел. Вычисления начинаются с единиц низшего разряда (за исключением деления). Промежуточные результаты записываются сейчас же после их получения.

И та и другая система имеют своё значение и свою область применения. В задачу начальной школы входит научить детей одинаково хорошо как устным, так и письменным вычислениям, обучение устному счёту предшествует обучению письменным вычислениям.

В советской школе устному счёту уделяется большое внимание, что обусловлено его большим образовательным и практическим значением.

Он нужен в практической жизни, где часто встречается потребность в устных вычислениях. Он облегчает письменные вычисления, так как последние содержат в себе элементы устного счёта.

С помощью устных вычислений, производимых над небольшими числами, легко объяснять новые для учащихся арифметические понятия: законы и свойства действий, состав чисел, зависимость между данными и результатами действий.

Устные вычисления содействуют развитию мышления учащихся, сообразительности, внимания, памяти.

Устный счёт постольку ценен, поскольку он является не только правильным, но и быстрым. Быстрота — необходимое качество устного счёта, так как устно вычислять приходится обычно при таких условиях, когда требуется скорость, например, при покупке и продаже, при технических расчётах у станка, в поле и т. д.

Беглость в устных вычислениях достигается: а) упражнениями и б) рациональными приёмами вычислений.

Чем больше упражнений, тренировки в устном счёте, тем лучше дети считают. Учитывая это, наша школа ввела такой порядок, при котором почти каждый урок арифметики начинается пятиминутными упражнениями в устном счёте. Эту хорошую традицию нужно поддерживать там, где она существует, и вводить её там, где она по тем или иным причинам отсутствует. При этом важно не ограничиваться только пятиминутными упражнениями, а использовать каждый подходящий момент урока для тренировки в устном счёте. Если при решении задачи или в письменных вычислениях учащийся встречается с небольшими числами или с большими, но удобными для устных вычислений (например, 18 000+6 000, 48 000—24 000), то в этих случаях нужно приучать ученика пользоваться устным счётом.

П р и ё м ы у с т н ы х в ы ч и с л е н и й. Приёмы устных вычислений можно разбить на о б щ и е и ч а с т н ы е.

К общим относятся те приёмы, которые применимы к любым числовым данным. Они основаны на использовании десятичного состава чисел и на применении законов и свойств арифметических действий. Например, чтобы сложить 28 и 37, нужно: а) разбить каждое слагаемое на разряды — десятки и единицы (28=20+8; 37=30+7); б) пользуясь сочетательным и переместительным законами сложения, сложить десятки с десятками (20+30=50), единицы с единицами (8+7=15); в) и наконец, сложить обе полученные суммы (50+15=65).

Чтобы умножить 28 на 3, необходимо: а) разбить 28 на десятки и единицы (28=20+8); б) пользуясь распределительным законом умножения, умножить 20 на 3 и 8 на 3 и обе полученные суммы сложить: $28\times3=(20+8)\times3=20\times3+8\times3=60+24=84$.

Методика ознакомления учащихся с устными приёмами вычислений подробно раскрыта в главах: «Первый десяток», «Второй десяток», «Первая сотня» (см. стр. 150—235).

С общими приёмами устных вычислений учащиеся знакомятся в I и II классах. В III и IV классах происходят упражнения, тренировка в применении этих приёмов и притом расширяется область чисел, над которыми производятся устные вычисления: в III классе производятся устные вычисления с круглыми числами в пределе 1 000, в IV — с любыми числами в пределе 200 и лёгкими случаями за пределами 1 000.

Нужно помнить, что усвоение общих приёмов даётся нелегко, и нужны многочисленные упражнения на протяжении всех четырёх лет обучения, чтобы учащиеся считали правильно и быстро, сознательно используя приёмы вычислений, основанные на десятичной группировке чисел и применении свойств арифметических действий. Школа должна вооружить ученика твёрдым знанием общих приёмов вычислений.

Наряду с общими существуют частные приёмы, которые упрощают вычисления и применимы только к некоторым числам.

Из таких приёмов назовём прежде всего приём округления. Если даны числа, близкие к круглым числам, то прежде чем производить действия, надо их округлить. Например, пусть дано сложить 297 и 496. Округляем первое и второе слагаемые, получаем 300 и 500. Складываем: 300+500=800. 800 — сумма, увеличенная на 7 (3+4). Чтобы получить настоящую сумму, уменьшаем 800 на 7, получаем 800—7=793.

Приём округления применим и в вычитании, где можно округлять и уменьшаемое, и вычитаемое, если даны округлимые числа, например:

1) 799 — 326 = 800 — 326 — 1 = 473.
2) 537 — 298 = 537 — 300 + 2 = 239.

В первом примере округлено уменьшаемое. Увеличивая его на единицу, мы и остаток увеличили также на единицу. Чтобы полу-

чить правильный остаток, надо от него отнять единицу. Во втором примере округлено вычитаемое путём прибавления к нему двойки; от увеличения вычитаемого на 2 остаток уменьшился на 2. Чтобы получить правильный остаток, надо к полученному числу прибавить 2.

При умножении и делении также возможно использовать приёмы округления, например:

$$30 \times 27 = 30 \times 30 - 30 \times 3 = 900 - 90 = 810.$$
$$796 : 4 = 800 : 4 - 4 : 4 = 200 - 1 = 199.$$

Округление — один из самых эффективных приёмов. К нему надо приучать учеников, начиная со II класса, и затем упражнять их в его применении и в III, и в IV классах. Когда во II классе встретится пример типа 29+56, то после применения общего приёма надо обязательно натолкнуть учеников на приём округления, при помощи которого результат находится проще и скорее. В IV классе после того, как будет пройдено изменение суммы и остатка от изменения данных, надо дать обоснование этого приёма.

При сложении и умножении следует использовать, где к этому представляется возможность, переместительное свойство суммы и произведения («От перемены мест слагаемых сумма не изменяется». «От перемены мест сомножителей произведение не изменяется»). Уже в I классе, когда встретится пример, в котором к меньшему числу прибавляется большее, надо требовать, чтобы ученик выполнил действие, прибавляя к большему меньшее. Так легче и скорее складывать числа. Такую же установку надо давать и позже, предлагая в III и IV классах сложные примеры, где выгоды перемещения слагаемых и сомножителей особенно ощутительны.

Дано	Следует вычислять в таком порядке:
$1 + 9 =$	$9 + 1 =$
$7 + 28 =$	$28 + 7 =$
$84 + 27 + 16 + 23 =$	$(84 + 16) + (27 + 23) =$
$4 \times 17 \times 25 =$	$25 \times 4 \times 17 =$
$8 \times 7 \times 15 =$	$15 \times 8 \times 7 =$

Перестановка слагаемых и сомножителей даёт здесь большой эффект в смысле упрощения, облегчения и ускорения счёта.

Приём последовательного умножения принадлежит к числу тех приёмов, с которыми надо ознакомить детей и научить их пользоваться им во всех подходящих случаях. Этот приём основан на следующем правиле умножения: «Чтобы умножить число на произведение, достаточно умножить это число сначала на первый сомножитель, потом полученное произведение умножить на второй сомножитель, затем на третий и т. д.».

Пусть дано умножить 45 на 16. Будем рассматривать 16 как произведение 4×4. Тогда согласно вышеуказанному правилу будем иметь:

$$45 \times 16 = 45 \times 4 \times 4 = 720.$$

Умножить 45 на 4 и полученное произведение ещё раз на 4 легче, чем умножить 45 сразу на 16.

Умножить 64 на 8, пользуясь общим приёмом, нелегко, но умножить на 8 путём последовательного троекратного удвоения 64 нетрудно: $64 \times 8 = 64 \times 2 \times 2 \times 2 = 512$. Решить пример 51×18 при помощи общего приёма трудно ($51 \times 18 = 51 \times 10 + 51 \times 8 = 510 + 408 = 918$). Решить же его путём последовательного умножения легко ($51 \times 18 = 51 \times 2 \times 9 = 102 \times 9 = 918$).

Приём последовательного деления часто приводит к лёгкому и быстрому выполнению деления. Он основан на следующем правиле деления: «Чтобы разделить число на произведение, можно разделить это число на первый сомножитель, полученное частное разделить на второй сомножитель, это частное на третий и т. д.».

Пусть дано разделить 360 на 8. Будем рассматривать делитель (8) как произведение сомножителей $2 \cdot 2 \cdot 2$. Тогда, по указанному правилу, чтобы разделить 360 на 8, делим 360 на 2, полученное частное 180 делим на 2 и новое частное 90 делим ещё раз на 2. Получится $360 : 2 : 2 : 2 = 45$.

Возьмём второй пример: 2 100 : 15. Если пользоваться общим приёмом, то устное деление в данном случае является затруднительным: для этого потребовалось бы делимое 2 100 разбить на два слагаемых 1 500 и 600, из которых каждое делится на 15. Но деление становится лёгким, когда, рассматривая 15 как произведение 3 и 5, прибегнем к последовательному делению: $2\,100 : 15 = (2\,100 : 3) : 5 = 140$. Приведём ещё несколько примеров на использование последовательного деления:

$$630 : 42 = 630 : 6 : 7 = 15$$
$$450 : 18 = 450 : 9 : 2 = 25$$
$$345 : 15 = 345 : 3 : 5 = 23$$
$$420 : 28 = 420 : 7 : 4 = 15$$

Приём последовательного умножения и деления указан только в программе IV класса, но применение его возможно и раньше — в III классе, когда объясняется умножение и деление на круглые десятки. В самом деле, чтобы умножить 12 на 30 мы должны рассматривать 30 как произведение 3×10 и умножить сначала 12 на 10, потом полученное произведение 120 на 3.

Вот те сравнительно немногие приёмы, знание которых является обязательным для учащихся начальной школы.

Если ученик хорошо владеет этими приёмами, особенно общим приёмом, то этого почти достаточно для того, чтобы он хорошо справлялся с устными вычислениями над небольшими числами (в пределе 100 и за этим пределом над «удобными» числами).

Кроме вышеуказанных обязательных приёмов, есть ещё приёмы, знакомство с которыми желательно в начальной школе. Сюда относятся особые приёмы умножения на 5, на 9, на 11, на 25, деления на 5 и 25.

Умножение на 5.

Умножение на 5 заменяется умножением числа на 10 и делением полученного произведения на 2. Если же множимое делится на 2, то сначала множимое делится на 2, а потом полученное частное умножаеться на 10, например:

$$78 \times 5 = (78 : 2) \cdot 10 = 39 \cdot 10 = 390;$$
$$87 \times 5 = 87 \cdot 10 : 2 = 870 : 2 = 435.$$

Умножение на 25.

Чтобы умножить число на 25, можно данное число умножить на 100 и полученное произведение разделить на 4. Или, если множимое делится на 4, то сначала число разделить на 4, а потом полученное частное умножить на 100, например:

$$48 \times 25 = (48 : 4) \cdot 100 = 12 \cdot 100 = 1\,200;$$
$$17 \times 25 = (17 \cdot 100) : 4 = 1700 : 4 = 425.$$

Деление на 5.

При делении числа на 5 делят это число на 10, если оно делится на 10, и полученное частное умножают на 2 или сначала умножают на 2, а потом полученное произведение делят на 10, например:

$$390 : 5 = (390 : 10) \cdot 2 = 39 \cdot 2 = 78;$$
$$185 : 5 = (185 \cdot 2) : 10 = 370 : 10 = 37.$$

Деление на 25.

Чтобы разделить число на 25, надо разделить его на 100, если оно делится на 100, и полученное частное умножить на 4, или сначала умножить делимое на 4, а потом полученное произведение разделить на 100, например:

$$600 : 25 = (600 : 100) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24;$$
$$425 : 25 = (425 \cdot 4) : 100 = 1\,700 : 100 = 17.$$

Умножение на 9.

Чтобы умножить число на 9, можно данное число умножить на 10 и из полученного произведения вычесть данное число, например:

$$36 \cdot 9 = 36 \cdot (10 - 1) = 36 \cdot 10 - 36 = 360 - 36 = 324.$$

Умножение на 11.

При умножении на 11 данное число умножают на 10 и к полученному произведению прибавляют данное число, например:

$$36 \cdot 11 = 36 \cdot (10 + 1) = 36 \cdot 10 + 36 \cdot 1 = 360 + 36 = 396.$$

Есть ещё один сокращённый приём умножения двузначного числа на 11, а именно: чтобы получить требуемое произведение, достаточно между цифрами десятков и единиц данного числа написать сумму его цифр:

$$36 \times 11 = 396.$$

Чтобы объяснить этот способ, достаточно фактически произвести умножение нескольких двузначных чисел на 11 и проследить ту закономерность, которая отражается в этом способе:

$$\begin{array}{r} \times\,36 \\ 11 \\ \hline 36 \\ 36 \\ \hline 396 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\,62 \\ 11 \\ \hline 62 \\ 62 \\ \hline 682 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\,75 \\ 11 \\ \hline 75 \\ 75 \\ \hline 825 \end{array}$$

Анализируя эти примеры, нетрудно заметить, как составлены полученные произведения: в них единицы и сотни обозначены цифрами данного числа (3 и 6; 6 и 2); десятки же обозначены цифрой, которая получается от сложения цифр данного числа ($3 + 6 = 9$, $6 + 2 = 8$). Если же эта сумма равняется или больше 10, то цифра сотен увеличивается на единицу ($75 \cdot 11 = 825$).

Все вышеуказанные приёмы делают процесс выполнения действий более коротким, а потому и более лёгким по сравнению с общим приёмом. Они основаны на использовании законов переместительного, сочетательного и распределительного, а также на изменении произведения с изменением одного из сомножителей и изменении частного с изменением делителя. Эти приёмы являются хорошей иллюстрацией к разделу «Изменение результатов в зависимости от изменения данных», проходимому в IV классе.

Помимо указанных, есть ещё ряд других упрощённых приёмов устных вычислений. Некоторые из них поражают нас лёгкостью и изяществом вычисления. Однако мы не можем их рекомендовать для начальной школы по следующим соображениям: 1) они охватывают небольшой круг чисел; 2) обоснование этих способов («почему так получается?») недоступно детям начальной школы; 3) эти приёмы насколько быстро усваиваются, настолько быстро и забываются.

Когда учащиеся ознакомятся с *различными* приёмами устных вычислений, нужно требовать, чтобы они в каждом отдельном случае пользовались наиболее рациональным для данного случая приёмом, предоставляя учащимся в то же время некоторую свободу в выборе приёма. Пусть дан учащимся пример для устного вычисления: 25×9. Учащиеся могут использовать при этом различные приёмы:

1) $25 \times 9 = 20 \cdot 9 + 5 \cdot 9 = 180 + 45 = 225$ (общий приём).

2) $25 \times 9 = 25 \times (10 - 1) = 25 \cdot 10 - 25 \cdot 1 = 250 - 25 = 225$ (приём округления).

3) $25 \times 9 = (25 \cdot 3) \cdot 3 = 75 \cdot 3 = 225$ (приём последовательного умножения).

4) $25 \times 9 = 25 \times (4 + 5) = 25 \cdot 4 + 25 \cdot 5 = 100 + 125 = 225$ (приём, основанный на использовании распределительного закона).

Все эти приёмы являются правильными, но один из них наиболее удобен для данного случая; это — приём округления.

ВИДЫ ЗАНЯТИЙ УСТНЫМ СЧЁТОМ НА УРОКЕ.

Упражнения в устном счёте надо проводить по возможности ежедневно. Чтобы при этом поддержать интерес к упражнениям, надо всячески их разнообразить и по форме, и по содержанию. Занятия устным счётом надо вести в живых, достаточно быстрых темпах, вовлекая в эту работу весь класс, каждого ученика. В практике советской школы распространены следующие виды устного счёта:

1. **Решение простых примеров** (в одно действие) — наиболее

распространённая и часто применяемая форма обучения устному счёту. На решении простых примеров объясняются приёмы устных вычислений, на них же производится и тренировка в устном счёте. Содержание примеров определяется разделом программы, проходимым в данный момент. Через каждые два-три примера учитель спрашивает не только ответ, но и объяснение, каким приёмом решён пример. Примеры могут предлагаться в троякой форме:

1) учитель называет те действия, которые надо произвести над данными числами, например:

36 разделить на 2; 24 умножить на 3; к 47 прибавить 53; от 84 отнять 68;

2) учитель предлагает данное число увеличить или уменьшить на несколько единиц или в несколько раз, а ученики сами должны подобрать необходимые действия, например:

36 уменьшить в 2 раза; 24 увеличить в 3 раза; 47 увеличить на 53; 84 уменьшить на 68;

3) предлагая примеры, учитель не указывает действие в явной форме, а называет результат, который должен быть найден, например:

найти сумму 47 и 53; найти разность 84 и 68; найти произведение двух чисел 24 и 3; найти частное от деления 36 на 2.

В младших классах надо давать действия в явной форме, но потом, сохраняя её как основную, надо называть действия и в неявной форме; это обогащает математическую речь учащегося и уточняет математические понятия, связанные с арифметическими действиями. Термины «сумма», «разность», «произведение», «частное» надо применять в устном счёте, начиная с III класса.

Надо готовить на урок столько примеров, чтобы их хватило на 5—7 минут. Количество зависит от сложности и трудности примеров.

2. **Решение сложных примеров** в форме беглого счёта. Особенность беглого счёта состоит в том, что при решении сложного примера промежуточные результаты вычислений дети держат в уме, а называют по предложению учителя последний окончательный результат.

Возьмём пример, рассчитанный на решение во II классе: $(24 + 18) : 6 \times 12 - 42 = \dots$

Учитель предлагает этот пример для решения так:

«К 24 прибавить 18 (пауза), разделить на 6 (короткая пауза), умножить на 12 (пауза), отнять 42 (пауза). Сколько получилось?» По вызову учителя ученик называет полученный результат.

Примеры для беглого счёта могут быть различной степени сложности: в 3, 4, 5, 6 действий, или звеньев. Выше дан пример, состоящий из четырёх звеньев. В младших классах число звеньев должно быть меньше, в старших — больше. Но и в I классе число звеньев можно доводить до четырёх. Например: $18 : 6 \times 4 + 7 - 10$. В IV классе число звеньев можно увеличить до 6. Например: $(87 + 63 - 75 + 125) : 4 : 25 \times 450$.

Длительность пауз должна быть такова, чтобы детям хватило времени на вычисление. Они могут быть то продолжительными, то короткими, в зависимости от трудности данного звена. В вышеприведённом примере для сложения 87 и 63 требуется больше времени, чем для вычитания 75 из 150. Поэтому первая пауза должна быть длительнее, вторая — короче. Но вообще говоря, паузы слишком затягивать не нужно. Чрезмерное затягивание пауз может создать у детей привычку считать медленно. В классе всегда могут найтись два-три ученика, считающие медленно, но по ним равняться не следует; наоборот, их всячески нужно поднимать до среднего уровня класса, ведя счёт живо и быстро.

Беглый счёт требует от учеников глубокого и напряжённого внимания. Поэтому злоупотреблять количеством упражнений, проводимых в этой форме, нельзя. Для беглого счёта надо брать 3—4 сложных примера на урок.

Как быть в тех случаях, когда несколько учеников дали неправильный ответ? Если эти «несколько» составляют небольшое количество, то останавливаться на примере и пересчитывать его не следует. К пересчёту надо прибегать в том случае, когда ошибка носит более или менее массовый характер.

3. **Счёт по таблицам.** В предыдущих упражнениях ученики воспринимали числа на слух, производили над ними действия устно и давали ответ, не прибегая к записи чисел. Но устные вычисления можно производить и над записанными числами. Школа должна проводить такие упражнения, которые базируются на зрительных восприятиях чисел, написанных учителем на классной доске или напечатанных в форме таблиц.

Существует несколько типов таких таблиц: таблицы Шапошникова, Шохор-Троцкого, Эменова и др. Может быть использована для устного счёта и таблица Пифагора. (О работе по таблицам см. главу IV, стр. 31.) Здесь же заметим, что для более удобного пользования таблицами нужно, чтобы ученики имели их в своих тетрадях. Таблицы имеются готовыми в печатном виде, но если бы в школе их не оказалось, учитель всегда может изготовить их по данному образцу.

Наряду с таблицами для устного счёта можно использовать пособие, известное под названием «Ряды цифр» Поляка. Это пособие состоит из одиннадцати полос; на восьми из них расположены вертикальные столбцы значащих цифр от 1 до 9, а остальные заполнены нулями (см. стр. 139). Полоски можно сделать из плотной бумаги или картона.

Пользуются этим пособием так: вешают две полоски на классной доске на некотором расстоянии одна от другой. Между ними пишут на доске знаки действий или же вставляют ещё одну полоску, на которой обозначены знаки действий.

Полоски с цифрами удобно использовать для действий с круглыми десятками и для действий с двузначными числами. Для этого вешают рядом по две полоски.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
1	3	5	7	9	6	5	1	0	0	0
7	9	1	4	5	3	1	5	0	0	0
2	5	7	6	8	1	4	2	0	0	0
6	8	4	1	3	7	6	6	0	0	0
3	4	8	5	7	2	5	3	0	0	0
8	7	3	9	2	5	2	4	0	0	0
4	2	9	3	6	8	6	3	0	0	0
9	6	2	8	1	4	3	2	0	0	0
5	1	6	2	4	9	4	5	0	0	0
4	5	8	6	9	7	3	4	0	0	0

Решая примеры, учащиеся могут записывать весь пример полностью, например: 13+57=70; 79+14=93 и т. д. Однако в целях экономии времени учитель чаще всего предлагает ученикам при самостоятельной работе записывать только номер примера по порядку и результат, например: 1) 70; 2) 93; 3) 101. Вычисления же ученик производит про себя устно.

«Ряды цифр», как и другие таблицы, являются особенно ценным пособием для двухкомплектной школы, где большое место занимают самостоятельные работы учащихся.

4. **Задачи.** Навыки устного счёта вырабатываются не только на примерах, но и на задачах.

Устное решение задач приносит двоякую пользу: с одной стороны, на решении задач учащиеся тренируются в быстром устном счёте, а с другой стороны, на устных задачах закрепляется уменье решать задачи вообще. В истории русской дореволюционной школы мы имеем яркий пример того, как на решении задач достигались прекрасные результаты по устному счёту: мы имеем в виду педагога С. А. Рачинского, который достигал изумительных результатов в устном счёте, благодаря решению не только примеров, но и задач.

Задачи для устного решения должны быть с небольшим количеством действий 2—3, максимум 4 действия.

Для устного решения можно брать задачи как составные арифметические, так и типовые, если они по количеству действий невелики. Нужно сказать, что хороший навык решать типовые задачи достигается главным образом на решении устных задач.

Если в задаче содержится более трёх числовых данных, то их можно записать на доске, чтобы не обременять память учащихся запоминанием большого количества чисел.

При проверке решения нужно чаще спрашивать учеников, как они производили вычисления, каким приёмом пользовались.

5. **Счёт-дополнение.** Для упражнения в сложении и вычитании полезно применять упражнения, в которых требуется дополнить данное число до известного круглого числа. Это упражнение заключается в следующем:

Допустим, что на данном уроке нужно поупражнять учеников в дополнении двузначных чисел до 100. Для этого учитель пишет на доске «100» и говорит детям: «Я буду называть различные числа, а вы дополняйте эти числа до 100. Например, я скажу 25, а вы должны прибавить к этому числу столько единиц, чтобы получилось 100, т. е. 75. Тот, кого я вызову для ответа, должен сказать: 75». После этого идёт упражнение в живом и быстром темпе; в течение 3—5 минут опрашивается весь класс (для вызова учеников не нужно ждать от них поднятия руки). Учитель говорит: 23! Ученик отвечает: 77! Учитель: 84! Ученик: 16! и т. д.

Это жизненная форма счёта; в широких народных массах всегда пользуются приёмом дополнения при вычитании. Если, например, покупателю нужно уплатить за покупку 36 рублей и он дал в кассу 100 рублей, то кассирша, давая сдачу, будет считать по способу дополнения: 4 рубля — 40 (дополнила 36 до ближайшего круглого числа), 60 руб.— 100 (ещё раз дополнила круглое число 40 до 100), а всего 64.

Этот вид устного счёта применим во всех классах, начиная с I.

В качестве круглого числа можно брать 10, 20 — в I классе, 100 — во II классе, 1 000 — в III классе, 100, 200 и 1 000 — в IV классе.

Можно придать счёту-дополнению и несколько иную форму, а именно: можно за постоянное число взять не результат, как в предыдущем упражнении, а какое-нибудь слагаемое. Получится упражнение в сложении.

Учитель даёт ученикам такое указание: «Я буду называть различные числа, а вы к каждому названному числу прибавляйте, допустим, по 8 (учитель может записать это число на доске), например, я скажу: 27! А вы прибавьте про себя к этому числу 8, получите 35. При вызове ответьте: 35! Внимание! Начинаем!»

После этого в достаточно быстром темпе ведётся занятие. Учитель: 64! Ученик: 72! Учитель: 29! Ученик: 37! и т. д.

Понятно, что в качестве постоянного слагаемого можно брать различные числа: для младших классов это будут однозначные числа, для старших — и однозначные и двузначные.

6. **Последовательное прибавление и отнимание данного числа.** Упражнениям в устном сложении и вычитании можно придать ещё более экономную форму, укладывая в минимум времени максимум вычислительной практики. Для этого достаточно назвать ученикам только первое отправное число и указать то постоянное число, которое надо последовательно прибавлять или отнимать, чтобы получать всё новые и новые суммы или остатки.

Указания со стороны учителя для этого упражнения будут таковы: «Я назову число. Вы прибавьте к нему 12, к полученной сумме прибавьте ещё раз 12, к вновь полученной сумме прибавьте снова 12 и т. д. Пусть первое число будет 3. Прибавив к нему 12, вы получите 15; к 15 прибавив 12, получите 27 и т. д. Называйте только результаты: 15, 27, 39... Все вычисления делайте про себя». После этого учитель называет постоянное слагаемое, допустим 11, затем границы счёта — первое и последнее число — допустим, 2 и 90. Вызванный ученик считает: «2, 13, 24, 35, 46». Следующий вызванный ученик продолжает: «57, 68, 79, 90».

Таким же путём проводится упражнение и в вычитании, только здесь сначала даётся верхняя граница, потом нижняя.

Например, учитель даёт задание: «Первое число 98. От 98 отнимите 12 и дальше от каждого остатка отнимайте снова по 12, пока это будет возможно. Называйте только результаты». Вызванный ученик отвечает: «98, 86, 74, 62». Следующий ученик продолжает: 50, 38, 26, 14, 2».

7. **Составление данной суммы из двух слагаемых.** Полезно проводить и такое упражнение, которое приводит к составлению данной суммы двух слагаемых.

Для этого учитель даёт ученикам какое-нибудь постоянное число в качестве суммы и говорит: «Запишите 10 таких примеров на сложение, в которых сумма равна 35». Ученики пишут:
1) $17+18=35$; 2) $24+11=35$; 3) $9+26=35$; 4) $20+15=35$ и т. д.

8. **Упражнения в умножении и делении.** а) Учитель даёт ученикам постоянный множитель, допустим 3, а затем называет ряд чисел, которые умножаются учениками на этот множитель.

Например, учитель говорит: 12! Ученик отвечает: 36! Учитель: 15! Ученик: 45! Учитель: 26! Ученик: 78! и т. д.

б) Подобные упражнения проводятся и на деление. В качестве исходного числа при этом берётся какое-нибудь большое число, богатое множителями, например 240, 160 и др.

в) Учитель может предложить ученикам написать несколько (возможно больше) примеров на умножение двух чисел, которые дают какое-нибудь постоянное произведение, допустим 72. В конечном счёте получится следующая таблица:

$1 \times 72 = 72$	$6 \times 12 = 72$	$18 \times 4 = 72$
$2 \times 36 = 72$	$8 \times 9 = 72$	$24 \times 3 = 72$
$3 \times 24 = 72$	$9 \times 8 = 72$	$36 \times 2 = 72$
$4 \times 18 = 72$	$12 \times 6 = 72$	$72 \times 1 = 72$

Суть этого упражнения заключается в разложении числа на множители.

ИГРЫ.

Многие упражнения в устном счёте проводятся в форме и г р ы; такие упражнения особенно заинтересовывают детей.

Из игр наибольшее распространение получили в школе следующие:

1. **Игра «в молчанку».** Для игры берётся квадрат или круг, в центре которого и по окружности расположены числа

(см. стр. 37). Около числа, расположенного в центре, ставится знак одного из арифметических действий. Постоянным компонентом считается это центральное число. Процесс игры заключается в следующем:

На классной доске вывешивается круг. Допустим, что в центре круга стоит цифра 8, а возле неё стоит знак сложения +. Один из учащихся вызывается к доске. Учитель указкой показывает число на окружности. Ученик прибавляет про себя к этому числу центральное число и записывает результат на доске. Учитель показывает другое число, ученик прибавляет к нему центральное число и результат записывает на доске. Все эти операции проводятся при абсолютной тишине: учитель молча показывает цифры, ученик молча вычисляет и записывает результат, ученики молча, поднятием рук, сигнализируют допущенную ошибку. Оттого эта форма занятий получила название «м о л ч а н к и».

Помимо образовательного, эта игра имеет и воспитательное значение: она укрепляет дисциплину класса. Её можно применять в I и во II классах. Круг можно заменить числовой фигурой другой формы — треугольной, прямоугольной (например, рис. 24).

36		42		57
15	+	16		75
28		73		84

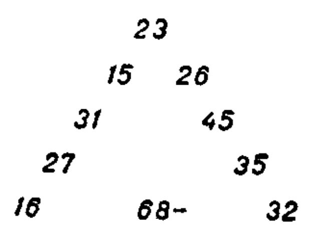


Рис. 24.

2. **Арифметическое лото.** Игра проводится так. Карточки и ответы к ним раздают детям на руки. Дети решают примеры и закрывают их карточками с ответами. Для наблюдения за правильностью решения можно ввести взаимную проверку (счётчики и контролёры). Можно проводить игру и так, как проводится обыкновенное лото. В этом случае все карточки-примеры складываются в коробочку и передаются одному ученику, который называет примеры, а те, у кого оказались ответы на примеры, накрывают их покрышкой.

Выигравшим считается тот, кто раньше других накрыл всю карточку, причём его решение проверяется всем классом. Дети играют в эту игру с большим интересом. Многие из них успевают не только сами накрыть примеры, но и посмотреть, правильно ли накрыл сосед. На игру можно отводить 10 минут в конце урока. Игру можно проводить на сложение и вычитание в пределе 20 и на все действия в пределе 20 в I классе, на таблицу умножения и деления и на все действия в пределе 100 во II классе.

3. **Круговые примеры.** На отдельных полосках бумаги пишутся

примеры, которые составляются так, что каждый следующий пример начинается с результата предыдущего примера:

16 + 8 =
24 × 3 =
72 — 24 =
48 : 3 =

Упражнение с круговыми примерами проводится следующим образом. Раздав учащимся пачки примеров, учитель говорит: «Дети, начинайте решать с какого хотите примера. Но когда решите первый, то ищите следующий, начинающийся таким числом, какое получилось от решения первого примера. Когда найдёте, решайте его и вновь ищите пример, начинающийся с ответа второго примера. И так продолжайте до конца. Если вы не найдёте примера, который бы начинался с предыдущего ответа, это значит, вы ошиблись где-то, и вам надо проверить решение». О том, что последний ответ должен равняться первому числу первого примера, учитель может не говорить, чтобы, пользуясь этим свойством, можно было легко проверить правильность решения.

Проверка проводится так. Учитель вызывает одного из учеников и спрашивает его, сколько у него получилось в ответе и с какого числа он начал. Если эти числа равны, то все примеры решены верно.

Дети с увлечением занимаются вычислениями и с чувством радости воспринимают совпадение первого и последнего чисел, что свидетельствует о правильном решении примеров. Эти упражнения применимы в I и во II классах.

5. **Угадывание задуманных чисел.** Есть целая серия упражнений-игр на угадывание задуманных чисел, начиная с очень простых и кончая весьма сложными.

Самая простая игра этого рода заключается в том, что учитель пишет на классной доске пример на сложение, допустим, 7 + 13 = 20, закрывает его газетой и предлагает ученикам угадать, какой пример написан («Я сложил,— говорит учитель,— два числа и получил в сумме 20. Какие это числа?»). Ученики перебирают всевозможные комбинации слагаемых, дающих в сумме 20, пока какой-нибудь ученик не назовёт 7 + 13.

То же на умножение: «Я перемножил два числа и получил в произведении 48. Угадайте, какие числа я перемножил?» Ученики называют различные комбинации сомножителей (1 × 48; 2 × 24; 3 × 16; 4 × 12; 6 × 8; 8 × 6; 12 × 4; 16 × 3; 24 × 2; 48 × 1), пока не назовут ту комбинацию, которая записана. Разновидность этой игры: учитель пишет на доске несколько примеров:

6 + 8	или	6 × 9
7 + 9		9 × 9
16 — 8		5 × 8
9 — 6		7 × 6

Вызывается один из учеников, который становится спиной к доске, а в это время учитель показывает классу ту строчку, которую вызванный ученик должен вычислить. После этого ученик поворачивается к доске, и если он напишет и вычислит ту строчку, которая была показана классу, то класс говорит: «Правильно», если же он не угадал и вычислит другую строчку, класс молчит. Ученик продолжает угадывать, и так иногда ему приходится перерешать весь столбик. Дети увлекаются и этой простой игрой. Надо добиваться только, чтобы ученики ещё на месте вычислили результаты, а на классной доске быстро их записывали.

Такого рода игры уместны в I и отчасти во II классе. В старших же классах эта игра усложняется тем, что над задуманным

кем-либо числом предлагают выполнить ряд арифметических действий и затем спрашивают полученный результат, по которому определяют тотчас же задуманное число.

Приведём ещё один вид упражнений на отыскание задуманного числа, который описан в методике Евтушевского:

Одному ученику предлагается задумать число. От задуманного числа ученик отнимает число, указанное учителем, например, 17; полученное число увеличивает в 2 раза и говорит классу результат, который получил. Класс обратным вычислением должен узнать задуманное число. Работа эта очень интересует учеников и весьма полезна, так как, во-первых, основывается на обратных поверочных вычислениях и, во-вторых, знакомит учеников с составом и анализом сложных формул.

Задача. «Задумайте чётное число не больше 60 и не меньше 40; разделите ваше число пополам и от полученной половины отнимите 16. Сколько получилось»?

Ученик говорит, положим, 12.

Решение. 12 получилось, когда от половины задуманного числа отняли 16. Значит, половина задуманного числа была $12 + 16 = 28$; так как половина задуманного числа 28, то всё число равно $28 \times 2 = 56$.

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ КВАДРАТЫ.

Хороший материал для упражнений в вычислительных навыках дают занимательные квадраты. Так называют квадраты, состоящие из 9, 16, 25 и т. д. клеток, заполненные числами, подобранными таким образом, что в них суммы чисел любого вертикального ряда, любого горизонтального ряда и любой диагонали одинаковы.

6	11	4
5	7	9
10	3	8

Рис. 25.

Помещённый квадрат (см. рис. 25) будет занимательным, так как в нём сумма чисел каждого вертикального ряда (6+5+10 и др.), сумма каждого горизонтального ряда (6 + 11 + 4 и др.) и сумма чисел, расположенных по диагонали (6+7+8; 4 +7 + 10) равна 21.

Подбирая числа для заполнения клеток квадратов, дети проделывают массу упражнений в сложении и вычитании и благодаря этому приобретают твёрдые вычислительные навыки.

Учитель должен хорошо владеть уменьем быстро составлять разнообразные квадраты, состоящие, по крайней мере, из 9 и 16 клеток. Для уменья составлять занимательные квадраты надо знать: а) как подбираются числа для таких квадратов; б) как найти сумму, которая должна получиться во всех направлениях квадрата, и в) как расположить подобранные числа в клетках занимательного квадрата[1].

---

[1] Даём изложение этих вопросов по статье Ф. Н. Блехер «Занимательные квадраты», опубликованной в журн. «Начальная школа», № 6, 1950.

Как подбираются числа для занимательного квадрата.

Есть два способа подбора чисел — простой и более сложный. В первом случае числа подбираются таким образом, что все они отличаются одно от другого на одно и то же число (т. е. в арифметической прогрессии). Такими числами являются: а) любые смежные числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; или: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 и т. д.; б) любой последовательный ряд нечётных чисел: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17; или: 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 и т. д.; в) любой последовательный ряд чётных чисел: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18; или: 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24 и т. д.; г) любой последовательный ряд чисел, кратный трём, пяти, восьми, десяти и т. д., например: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27; или: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45; или: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 и т. д.

Второй — более сложный — способ подбора чисел состоит в том, что возрастание подбираемых чисел на одно и то же число происходит внутри отдельных групп чисел — внутри троек для квадрата из 9 клеток; но между одной группой и другой нарастание возможно на любое другое число, одинаковое для всех переходов. Пусть, например, первые три числа будут 7, 9, 11; переходом ко второй тройке может быть любое число, например 16, а вся тройка — 16, 18, 20. Переходное число 16 больше последнего числа первой тройки (11) на 5; поэтому переходное число третьей тройки (25) должно быть тоже на 5 больше последнего числа второй тройки (20). Таким образом, подобранные числа для занимательного квадрата будут: 7, 9, 11, 16, 18, 20, 25, 27, 29.

Эти способы подбора чисел пригодны и для других квадратов, т. е. для квадратов из 16, 25, 36 и т. д. клеток.

Как найти сумму, которая должна получиться во всех направлениях, когда числа для квадратов подобраны.

Чтобы найти сумму, которая должна получиться во всех направлениях при составлении квадрата, достаточно сложить средние три числа из девяти подобранных. Они и дадут «сумму квадрата». Например: среди подобранных для квадрата девяти чисел 1, 2, 3, **4, 5, 6**, 7, 8, 9, средняя тройка чисел (4, 5, 6) в сумме даёт 15. Это и есть сумма, которая в квадрате из данных чисел получится во всех направлениях.

Возьмём другой пример. Пусть для составления квадрата мы подобрали следующий ряд чисел: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18. Для получения суммы этого квадрата берём среднюю тройку чисел этого ряда (8, 10, 12), складываем их. Полученная сумма — 30 — и будет искомой.

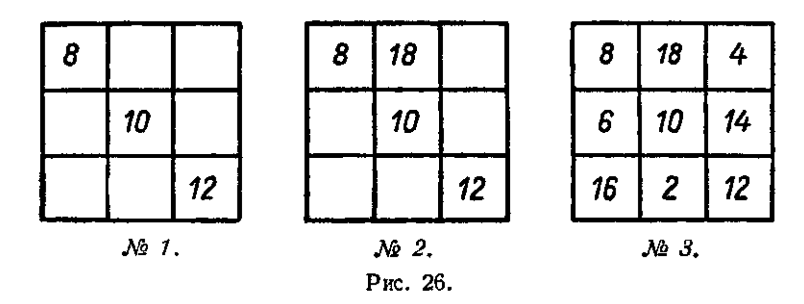
Для квадрата с числами 5, 10, 15, **20, 25, 30**, 35, 40, 45 искомая сумма будет 75 (20+25+30=75) и т. д.

Как расположить подобранные числа в клетках занимательного квадрата.

Пусть для квадрата из 9 клеток взяты числа: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Для размещения этих чисел в клетках поступим так: возьмём средние три числа — 8, 10, 12 — и расположим их по диагонали (безразлично, с какой стороны начать: с правой или левой, сверху или снизу) (см. квадрат № 1).

Рядом с наименьшим из этих трёх чисел, т. е. с 8, поместим наибольшее из девяти чисел, т. е. 18 (по горизонтали или по вертикали — безразлично) (см. квадрат № 2).



8		
	10	
		12

№ 1.

8	18	
	10	
		12

№ 2.

8	18	4
6	10	14
16	2	12

№ 3.

Рис. 26.

Имея расставленные в клетках 4 числа, учащийся заполняет дальше остальные клетки путём вычислений, зная, что в сумме должно быть число 30. Для заполнения данного квадрата ученик производит следующие вычисления:

1) $18 + 10 = 28$
2) $30 - 28 = 2$

3) $12 + 2 = 14$
4) $30 - 14 = 16$

5) $16 + 8 = 24$
6) $30 - 24 = 6$

7) $6 + 10 = 16$
8) $30 - 16 = 14$

9) $14 + 12 = 26$
10) $30 - 26 = 4$

Обычно все эти вычисления выполняются устно с широким использованием приёма дополнения.

Так получается квадрат (см. № 3), удовлетворяющий всем требованиям занимательного квадрата: в нём сумма по горизонталям (рядам), вертикалям (столбцам) и диагоналям одинакова и равна 30.

Можно было бы начать расположение чисел в клетках иначе, а именно: расположить средние три числа — 8, 10, 12 — по диагонали с правой стороны и сверху вниз (см. квадрат № 1 на стр. 147); далее, рядом с наибольшим числом из трёх, т. е. с 12, поместить наименьшее из десяти подобранных чисел, т. е. 2 (см. квадрат № 2). А дальше путём вычислений найти все остальные числа и заполнить ими клетки (см. квадрат № 3).

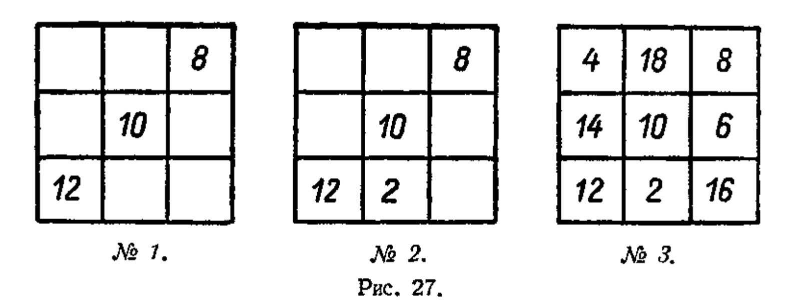


Рис. 27.

Составление квадратов из данных чисел с данной суммой можно всячески варьировать, что видно из следующих образцов:

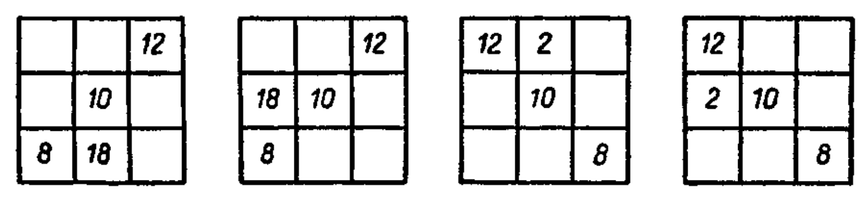


Рис. 28.

Упражнения с занимательными квадратами могут быть трояского рода:

1) Учитель даёт учащимся готовый, заполненный числами квадрат и предлагает им вычислить сумму чисел в каждом ряду, в каждом столбце и с угла на угол (по диагонали). Такие упражнения целесообразно давать в первом полугодии в I классе. Сумма даётся сначала в пределе 10, а потом в пределе 20.

2) Учитель даёт учащимся квадрат с 4 заполненными клетками, называет сумму чисел квадрата и предлагает им заполнить пустующие клетки. Такие упражнения даются в I классе (во втором полугодии) и на протяжении всего года во II классе. В I классе числа ограничиваются пределом 20, во II классе — пределом 100, а в четвёртой четверти пределом 1 000, при этом могут даваться только круглые числа.

3) В III классе учитель может познакомить учащихся с правилами составления занимательных квадратов и давать задания составить занимательный квадрат: подобрать для этого ряд чисел; выделив средние числа, найти сумму чисел квадрата и расположить числа в клетках квадрата.

Занимательные квадраты служат для упражнений в устном счёте. Поэтому вычисления при заполнении клеток должны производиться устно. При включении занимательных квадратов в домашние задания можно требовать от учащихся записи действий, но с условием, чтобы учащиеся пользовались при этом устными приёмами вычислений.

ОРГАНИЗАЦИЯ ЗАНЯТИЙ УСТНЫМ СЧЕТОМ.

При устных вычислениях от ученика требуется глубокая сосредоточенность, исключительная концентрация внимания. Поэтому занятия устным счётом нужно начинать в обстановке полной тишины и внутренней собранности ученика. «Внимание! Начинаем!» После такого предупреждения учитель говорит пример или задачу.

Упражнения в устном счёте нужно вести достаточно живо и быстро, обязательно вовлекая в эту работу весь класс, всех учеников.

Упражнения в устном счёте должны быть заранее хорошо подготовлены: у учителя должен быть достаточно большой набор задач и примеров, все результаты вычислений должны быть ему известны. Форма работы должна быть заранее определена, т. е. учитель при подготовке к уроку должен установить, будет ли работа проходить на слух, или он будет пользоваться и записями; будут ли ученики говорить ответы устно, или они их будут записывать, и т. д.

Упражнения в устном счёте целесообразно проводить в начале урока, соблюдая непременное требование, чтобы на всём протяжении урока вычисления над небольшими числами проводились устно.

Чтобы заставить считать каждого ученика и создать условия для точной, быстрой проверки результатов счёта, полезно применять следующий приём: перед каждым учеником на парте лежит набор цифр; решив пример и получив ответ, ученик выбирает нужную цифру и в поднятой руке показывает её учителю. Если ответ — двузначное число, ученик выбирает соответствующие две цифры, составляет из них число и держит его в поднятой руке. Учитель имеет возможность видеть, как решён данный пример каждым учеником.

Проводя упражнения, выполняя намеченный план, учитель должен внимательно следить за классом, и если будут замечены признаки утомления учащихся, то эти занятия должны прекращаться.

Навыки в устном счёте должны оцениваться так же, как оцениваются навыки в письменном вычислении и решении задач.

Для этого учитель должен производить индивидуальный опрос учеников; в этих же целях могут быть с успехом использованы также сложные примеры, решаемые в порядке беглого счёта. Приступая к беглому счёту, учитель даёт задание заготовить листочки и на них записывать ответ на каждый пример. По окончании упражнений учитель собирает листочки и по ним производит оценку успеваемости в устных вычислениях.

Учащимся I и II классов, где практикуются устные приёмы вычислений, можно изредка давать на дом «столбики» для упраж-

нений в устном вычислении с последующей проверкой в классе выполнения этой работы. Точно так же изредка можно давать для домашних упражнений столбики из задачника и учащимся III и IV классов.

Эти упражнения полезны тем, что они заставят ученика в спокойной домашней обстановке совершенно самостоятельно продумать и подыскать для каждого примера наиболее рациональные приёмы вычислений и запомнить наиболее часто встречающиеся в практике результаты вычислений.

Выше приведено много разнообразных видов упражнений в устном счёте. Наиболее употребительные из них: решение простых и сложных примеров, решение простых и сложных задач. Другие виды упражнений применяются реже. Однако и они должны найти себе место на уроках арифметики. Они оживляют работу по устному счёту, создают у детей повышенный интерес к нему. А тот, кто возбудит у детей интерес к устным вычислениям, несомненно, добьётся больших успехов; и, наоборот, как бы «методично» ни преподавал учитель, если он не заронит в детскую душу искру любви к арифметике, если у детей будет равнодушное отношение к этому предмету, то на крупные успехи рассчитывать трудно. Какую большую роль в этом деле играет учитель, его отношение к делу, видно из примера педагогической деятельности С. А. Рачинского, который, работая в сельской школе в 80-х годах прошлого столетия, поставил устный счёт на небывалую высоту.

Вот что пишет этот педагог о причине своих успехов:

«Посторонних посетителей, изредка заглядывающих в мою школу, всего более поражает умственный счёт её учеников. Та быстрота и лёгкость, с которой они производят в уме умножения и деления, обращаются с мерами квадратными и кубическими, соображают данные сложной задачи, то радостное оживление, с которым они предаются этой умственной гимнастике, наводят на мысль, что в этой школе употребляются особые усовершенствованные приёмы для преподавания арифметики, что я обладаю в этом отношении каким-то особым искусством или секретом.

Ничего не может быть ошибочней этого впечатления. Конечно, *теперь* я владею некоторым навыком к умственному счёту, могу импровизировать арифметические задачи в том быстром темпе, в котором они решаются моими учениками. Но до этих скромных умений довели меня, или лучше сказать домучили, сами ученики.

Именно домучили. Никогда не занимался я специально арифметикой, упражняться в умственном счёте никогда и не думал. Принялся я за преподавание счёта в сельской школе, не подозревая, на что я иду.

Не успел я приступить к упражнениям в умственном счёте, которые до тех пор в школе не практиковались, как в ней к ним развилась настоящая страсть, не ослабевающая до сих пор. С раннего утра и до позднего вечера стали меня преследовать то одна группа учеников, то другая, то все вместе — с требованием умственных задач. Считая эти упражнения полезными, я отдал себя в их распоряжение. Очень скоро оказалось, что они опережают меня, что мне нужно готовиться, самому упражняться.

Беспрестанная усиленная возня с цифрами нагнала на меня настоящий арифметический кошмар, загнала меня в теорию чисел, заставила меня неоднократно открывать Америку, т. е. неизвестные мне теоремы Фермата и Эйлера».

Из этих откровенных признаний Рачинского видно, что секрет его выдающихся результатов заключался в его беспрерывной работе над собой, в его «усиленной возне с цифрами», в беспрерывном продвижении вперёд.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

ПЕРВЫЙ ДЕСЯТОК.

При обучении детей первому десятку перед учителем стоят следующие задачи:

1. Научить детей считать до 10, сочетая обучение счёту с развитием ясного представления о каждом числе: о его месте в ряде натуральных чисел, о величине и составе числа. 2. Научить писать цифры. 3. Обучить сложению и вычитанию в пределе 10, дав детям твёрдое знание (наизусть) таблицы сложения. 4. Дать детям первые навыки в решении простых задач на сложение и вычитание.

Таковы образовательные задачи изучения первого десятка. Но ещё более велики, разносторонни и ответственны воспитательные задачи, осуществляемые учителем в связи с началом обучения детей первому десятку.

Изучение первого десятка — это начало работы с классом, начало формирования детского коллектива, начало воспитания у ребёнка тех качеств, которые нужны ему как ученику. Уроки арифметики, как и другие уроки, нужно использовать для того, чтобы научить ребёнка учиться, приобретать знания.

Для усвоения арифметики нужно иметь устойчивое внимание, уметь слушать речь учителя, уметь вести себя в классном коллективе.

С самого начала занятий нужно приступить к воспитанию этих умений, используя в этих целях каждый момент урока арифметики.

Ребёнок, только что ставший школьником, ещё не организован, не умеет обращаться с книгами и учебными принадлежностями, не умеет вести тетрадь, поддерживать необходимый порядок в своём «учебном хозяйстве». На правильном обращении с задачником, тетрадью по арифметике и дидактическим материалом нужно приучать ученика к порядку, чистоте и аккуратности, бережному отношению к социалистической собственности.

Связь между обучением и воспитанием на уроках арифметики должна быть самая тесная и постоянная. Успехи в том и другом взаимно обусловлены: чем лучше разрешаются воспитательные

задачи, тем успешнее идёт усвоение знаний по арифметике; с другой стороны, чем красочнее и увлекательнее методы обучения арифметике, тем вернее формируются у детей-семилеток те качества ума и характера, которые им нужны для приобретения знаний.

Изучить счёт до 10 — это значит:

а) знать название первых десяти чисел и уметь произносить эти названия в их естественной последовательности;

б) понимать, что при пересчитывании той или иной совокупности предметов последнее произнесённое слово — числительное — означает, сколько всего предметов в данной совокупности;

в) знать место каждого числа в натуральном ряде чисел (какому числу предшествует данное число, за каким числом оно следует);

г) иметь ясное представление о величине той совокупности, обозначением которой это число является.

Таким образом, обучение счёту соединяется с развитием у детей представления о каждом числе первого десятка в отдельности.

Первая задача при обучении детей арифметике заключается в том, чтобы научить их считать в пределе 10 сознательно. Сознательным будет такой счёт, когда с каждым названием числа у ребёнка возникает правильное представление о группе предметов, обозначаемой этим числом.

Чтобы достигнуть этой цели, операцию счёта на первых порах нужно соединить с наглядным и вполне конкретным процессом образования группы путём присчитывания ещё одного предмета или одной единицы. Иначе говоря, нужно учить считать не только на пересчитывании готовых групп, но и на тех группах, которые создаются, образуются самим учеником. Создавая группы, считать их, присчитывая по одному,— таков должен быть основной метод обучения счёту.

Вот «один» кубик. Прибавим к нему ещё один кубик. Образовалось «два» кубика. Вот «один» стул. Присчитаем к нему ещё один стул. Образовалось «два» стула. У ребёнка складывается представление, что «два» образуется, когда к одному предмету присоединяется ещё один.

Вот «два» кубика. Прибавим к двум ещё один кубик. Образовалась группа в «три» кубика. К двум стульям присоединим ещё один стул. Получился ряд в «три» стула. Вообще, когда к двум присчитываем ещё единицу, получается группа «три». Когда к трём прибавляется ещё единица, получается группа в «четыре» предмета и т. д.

Ученик сам создаёт группу и этой группе в целом даёт название «два», «три», «четыре», «пять» и т. д. Не единичному предмету присваивается название «пять», как это бывает, когда ученик пересчитывает готовый ряд предметов, а именно группе в целом.

Как только ученик создал группу, сейчас же ставится вопрос «Сколько получилось предметов?» Даётся ответ, называется новое число, и это названное число ассоциируется с данным множеством. От этого название нового числа получает совершенно определённое и вполне конкретное содержание. Величина числа конкретизируется через величину той совокупности предметов, обозначением которой оно является.

В результате такого счёта ученик усваивает последовательность натурального ряда чисел, научается принимать во внимание каждый предмет и в то же время научается относить последнее названное число к целой группе.

В дальнейших упражнениях процесс счёта при пересчитывании предметов готового ряда упрощается. Присоединение предметов становится ненужным, ученик при счёте ограничивается только прикасанием к предметам; а дальше и это становится лишним: каждый пересчитываемый предмет отмечается только движением глаз. Громкое название чисел ученик заменяет произнесением их про себя и только последнее число называет вслух.

Чтобы убедить учеников в том, что при счёте очень важно запоминать уже названное числительное, и чтобы развить у детей способность удерживать в памяти всю группу в целом, очень полезно упражнять детей в счёте на слух — счёт хлопков, ударов. Допущенная при таком счёте ошибка не может быть исправлена: прозвучавший удар исчезает, и нельзя начинать счёт сначала, как это бывает при пересчитывании данного ряда предметов.

Для этой же цели, т. е. для развития способности запоминать числа при счёте, служат и упражнения в определении количества жидких и сыпучих тел, когда приходится наливать определённое количество стаканов воды, насыпать определённое количество песку. «Налейте 5 стаканов воды! Насыпьте 8 чайных ложек песку!» — такие задания должны иметь место при обучении детей счёту. Выполняя их, ученик считает медленно и в то же время удерживает в памяти каждое вновь полученное число.

И, наконец, наиболее ясное и правильное представление о числе получается у ребёнка тогда, когда большее число (большая группа) разбивается на меньшие и когда эта группа даётся в легко обозримой форме. Этому помогает применение разнообразных числовых фигур[1]. Если четыре предмета расположить по одной линии ••••, то такое расположение будет очень удобно для счёта, но неудобно для обозрения целиком этой группы, для

---

[1] Под числовой фигурой подразумевают группу предметов (кружочков, квадратиков), служащую для образования наглядных числовых представлений. Существуют различные системы числовых фигур. Наиболее старые из них — фигуры русского методиста Буссе. В них все числа первого десятка составлены либо из пар, либо из троек (рис. 29). Есть числовые фигуры, в которых все числа составлены из троек (рис. 30). Большим распространением пользуются квадратные числовые фигуры, в которых все числа построены из пар, соединённых по две (рис. 31).

определения, из каких более мелких групп она состоит. Для этой последней цели очень удобна числовая фигура ⚃. Глядя на неё, ребёнок без затруднения и быстро называет число 4. Чтобы назвать это число, ребёнок должен пересчитать точки, но в то же

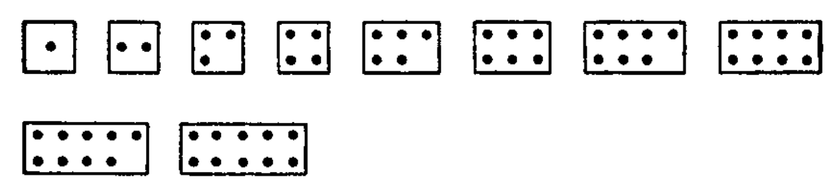


Рис. 29.

время он ясно видит, что четыре — это два и два, четыре — это три и один, один и три.

Таким образом, числовые фигуры являются средством для формирования конкретных представлений о числах. Но в то же

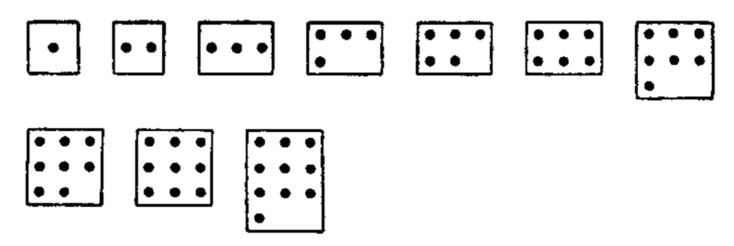


Рис. 30.

время они служат и средством для абстрагирования числа: они показывают ребёнку, что число не зависит от формы расположения предметов; форма различна, а число одно и то же.

Большое значение имеет счёт предметов, расположенных в

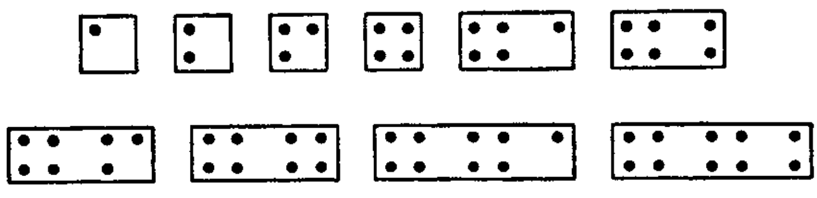


Рис. 31.

последовательном порядке («по одной линии»): он способствует образованию более точного представления о числах тем, что ведёт к установлению между ними *отношений*, а именно — что числа следуют одно за другим, что каждое последующее число *больше* предыдущего, что каждое предыдущее число *меньше* последующего. На этой основе происходит в дальнейшем усвоение операций над числами — сложения и вычитания.

ИЗУЧЕНИЕ ЧИСЕЛ В ПРЕДЕЛЕ 10.

На первых уроках учитель выявляет у детей запас числовых представлений, предлагая им считать на счётном материале и отвлечённо назвать, сколько предметов в данной совокупности, прибавлять и отнимать по одной и несколько единиц на наглядных пособиях и отвлечённо. Такая проверка вскроет картину состояния счётных и вычислительных навыков у детей и даст учителю материал для составления реального плана занятий с классом в целом и с некоторыми детьми индивидуально.

В этот план должно войти обучение детей сознательному счёту и параллельно с этим развитие у учащихся представления о каждом числе первого десятка в отдельности. Для этого первые уроки должны быть посвящены изучению отдельных чисел в порядке натурального ряда: 1, 2, 3, 4, 5 и т. д. до 10 включительно.

Изучая каждое число, нужно сделать следующее:

а) Показать учащимся на наглядных пособиях, как образуется данное число путём присоединения к предшествующему числу, уже изученному, одной единицы.

б) Рассмотреть естественные группы предметов, которые характеризуются данным числом: например, при изучении числа «четыре» рассмотреть четыре ножки у стула, у стола, четыре ноги у лошади, у кошки и т. п., четыре кружочка в числовой фигуре, четыре стекла в оконной раме. Это будет первой ступенью абстрагирования числа, выделение в различных совокупностях его одинаковой количественной стороны.

в) Провести в пределе изучаемого числа прямой и обратный счёт, который вначале выступает как пересчитывание предметов составленной группы, а затем как отвлечённый счёт. Этими упражнениями достигается твёрдое знание словесного числового ряда, знание отношения чисел между собой, например: число «пять» больше четырёх, но меньше шести: пять находится между четырьмя и шестью; пять следует за четырьмя и предшествует шести.

г) Изучить состав данного числа из меньших чисел; например, шесть — это два, два и ещё два; шесть — это три и три; шесть — это четыре и два. Такие упражнения проводятся сначала на кубиках, на счётах, а затем на числовых фигурах.

д) Показать обозначение числа цифрой — сначала печатной, потом письменной. Ученики учатся узнавать печатную цифру и обозначать письменную цифру.

В изучение чисел могут быть введены и элементы сложения и вычитания, производимые на основе знания состава чисел. Однако изучение действий на этой стадии работы не обязательно. Это задача последующего периода. Но если учитель занимается одновременно с двумя классами и ему необходимо давать самостоятельные работы учащимся, то здесь можно ввести сложение и

вычитание, давая учащимся письменные примеры для самостоятельного решения.

После счёта на предметных наглядных пособиях используется материал задачника. Однако задачник на этой ступени обучения арифметике играет второстепенную роль; главное здесь счёт и вычисления на конкретных предметах, на наглядных пособиях и дидактическом материале.

Пример изучения числа «четыре».

Учитель, откладывая на классных счётах три шарика, говорит: «Сколько шариков отложено на счётах?»

Ученик. Три шарика.

Учитель. Теперь к трём шарикам присчитаем ещё один шарик. Сколько шариков получилось? Пойди посчитай!

Ученик. Один, два, три, четыре. Здесь всего четыре шарика.

Учитель. Как мы получили четыре шарика?

Ученик. К трём шарикам прибавили один шарик, получилось четыре шарика.

Учитель. Выньте свои палочки! Отложите три палочки. Прибавьте к ним ещё одну. Сколько палочек получилось?

Ученик. К трём палочкам прибавили одну палочку, получилось четыре палочки.

Учитель. Отложите три кружочка, прибавьте к ним ещё один. Сколько получилось?

Ученик. К трём кружочкам прибавили один кружочек, получилось четыре кружочка.

Учитель. Сколько ножек у стула? Сколько ножек у стола? Сколько стен в комнате?

Ученик. Четыре ножки, четыре стены.

Учитель. Назовите таких животных, у которых четыре ноги.

Ученик. У лошади четыре ноги, у кошки четыре ноги.

Учитель. Посчитайте на кубиках, на классных счётах от одного до четырёх.

Ученик. Один кубик, два кубика, три кубика, четыре кубика. Один шарик, два шарика, три шарика, четыре шарика.

Учитель. Считайте теперь от одного до четырёх без кубиков.

Ученик. Один, два, три, четыре.

Учитель. Считайте назад от четырёх до одного.

Ученик. Четыре, три, два, один.

Далее учитель переходит к выяснению состава числа «четыре». Для этого он откладывает на счётах четыре шарика и спрашивает, как можно разложить четыре шарика.

Ученик. Четыре шарика — это два и ещё два шарика; можно разложить на два и два (два справа и два слева); три и один; один, один и два; один, один, один и ещё один.

Учитель. Как составить четыре кубика из отдельных кубиков? Как составить четыре кубика из двоек (пар)? Как составить четыре кубика, чтобы была и тройка?

Чтобы закрепить знание состава числа «четыре», учитель показывает ученикам числовые фигуры различной формы, предлагая всякий раз сказать, как составлены эти фигуры, а затем нарисовать их.

Учитель. Нарисуйте в тетрадях четыре кружочка, четыре крестика, четыре квадратика. Расположите их по-разному в одну линию,— по два, три и один, один и три.

После этого учитель показывает ученикам печатную цифру «4», фиксируя внимание учащихся на начертании этой цифры (слегка наклонная корот-

кая палочка, палочка вправо и длинная палочка прямо). Ученики показывают эту цифру в задачнике на разных страницах, находят её среди разрезных цифр, выложенных учителем на столе, открывают по предложению учителя четвёртую страницу задачника, книги для чтения; находят число 4 в отрывном календаре и т. д. Завершением работы по изучению числа «четыре» может служить письмо цифры «4».

В заключение вывешивается числовая таблица и таблица-картинка (рис. 32), на которой дети считают и показывают печатную цифру.

Таково в основном содержание работы по изучению числа «четыре» и других чисел в пределе первого десятка.

Рассматривая состав числа «четыре», нужно остановить внимание учащихся на всех комбинациях этого числа, но при изучении чисел, боль-

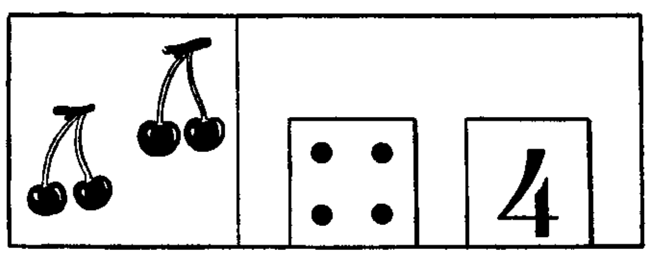


Рис. 32.

ших 6, достаточно остановиться только на некоторых комбинациях, чтобы их запомнили учащиеся, например: семь — это пять и два; семь — это четыре и три; шесть и один; восемь — это четыре и четыре; пять и три; два, два, два и ещё два (четыре пары, четыре двойки); десять — это две пятёрки, пять двоек, три тройки и один.

НАГЛЯДНОСТЬ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЧИСЕЛ ПЕРВОГО ДЕСЯТКА И ДЕЙСТВИЙ НАД НИМИ.

Основным условием успешного обучения арифметике детей семилетнего возраста является наглядность обучения. Принцип наглядности — этот старый и давно всем известный принцип — при работе с семилетками приобретает новое значение. Каждый шаг в обучении должен сопровождаться применением наглядных пособий. Из них в классе обязательно должны быть:

а) классные счёты с одной-двумя проволоками,
б) кубики арифметического ящика,
в) числовые таблицы, 10 таблиц по одной для каждого числа,
г) разрезные цифры.

Кроме того, в классе должны быть и картинные красочные пособия, способные чёткостью своих контуров и яркостью своих красок привлечь внимание детей, заинтересовать их. Такими пособиями являются раскрашенные рисунки с изображением яблок, морковок, грибов, птиц, рыб, домиков, лодочек, флажков, ёлочек и т. д. Полезно иметь плакаты с пейзажами опушки леса, луга, реки, пруда. Весь этот материал должен жить и действовать в воображении детей: пусть утки плавают по зеркальным водам пруда, приплывая к берегу и отплывая от него; пусть вырастают под ёлкой и срываются грибы, прилетают на ветки деревьев и

улетают с них птички, растут на яблонях и срываются яблоки... На этих сюжетах создаются и решаются первые задачи.

Класс во время уроков арифметики должен преображаться и оживать. В нём должна чувствоваться сама жизнь, с её животными, птицами, растениями, которые так хорошо знакомы детям, любимы ими и будят их воображение. Первые уроки арифметики должны быть яркими, жизненными.

Арифметика — эта строгая и отвлечённая наука — должна прийти в класс к семилетним детям в сопровождении картин, цветов, детских игрушек, словом, всего того, что так близко и понятно ребёнку; и тогда ребёнок поймёт и полюбит её.

Наглядность, применяемая в первом классе, должна давать материал не только для наблюдения и созерцания, но и для деятельности ребёнка. Каждый ребёнок должен иметь у себя в своём личном пользовании счётный материал:

а) палочки или спички;

б) кружочки, прямоугольники или квадратики, вырезанные из картона;

в) разрезные цифры и знаки действий.

Весь этот материал должен храниться у ученика в определённом порядке — в коробочках или ящичках, а ещё лучше — в специально приспособленном «счётном пособии», сделанном из холста с карманами для вставки дидактического материала и хранения его.

Всё, что демонстрируется учителем на классном пособии, повторяется затем каждым учеником на его дидактическом материале; благодаря этому на уроке сочетается общеклассная работа с индивидуальной, наблюдение — с действенным восприятием и воспроизведением.

При смелом и широком использовании наглядных пособий нужно уже в первом классе уметь ставить границы их применения. Конечная задача преподавания арифметики состоит в том, чтобы создать у детей понятие отвлечённого числа, научить отвлечённому счёту, развить отвлечённое мышление. При достижении этой цели наглядность должна сопровождать начальный этап в работе, процесс формирования понятия. Далее должен наступать такой момент, когда наглядные пособия уступают своё место обобщающей, абстрагирующей мысли ученика. Успешно обучать арифметике будет тот, кто сумеет установить правильное отношение между наглядным и отвлечённым, кто сумеет постепенно и плавно переводить учеников от конкретного к абстрактному.

ПИСЬМО ЦИФР.

Обучение письму цифр является ответственным моментом в деле обучения детей арифметике. Чёткость, правильность и красота в письме цифр всецело зависят от того, как будет поставлено дело на первых шагах обучения детей арифметике.

Письмо цифр может идти параллельно с изучением чисел, т. е. при изучении каждого данного числа ученики могут писать и его цифру. При таком порядке цифра, знак числа, тесно увязывается с самим числом, между ними устанавливается прочная ассоциация. Но такой порядок имеет и крупные недостатки: ученики очень рано начинают писать цифры, из которых некоторые имеют весьма сложное начертание, например цифры: 2, 5, 8.

Явно нецелесообразно заставлять детей-семилеток на другой же день по приходе в школу писать цифру «два», а затем «три» и т. д. Более правильным будет такой порядок: при изучении первых чисел знакомить учащихся только с печатными цифрами, с помощью которых обозначать действия при решении примеров и задач; в это же время нужно усиленно заниматься на уроках русского языка графическими упражнениями, письмом элементов букв и цифр, с тем, чтобы примерно недели через две приступить к письму цифр.

Каждая цифра имеет свою транскрипцию, своё определённое, твёрдо установленное начертание. Эту транскрипцию нужно соблюдать строго, не допуская никаких отклонений от установленной формы. Красота в письме цифр определяется правильной соразмерностью её элементов. Нарушение пропорций ведёт к искажению транскрипции.

Чтобы очертания цифр получались правильными, учитель должен объяснять детям очень обстоятельно и наглядно, как именно пишется изучаемая цифра, из каких частей она состоит, что пишется сначала, что пишется потом, откуда надо начать, где кончить, как соединить один элемент с другим.

Объясняя способы написания отдельных элементов в цифре, учитель должен изображать их крупно, чётко и красиво мелом на классной доске.

Объяснение письма каждой цифры может быть дано примерно в следующей форме (при письме в тетради в клетку).

«1». Сначала снизу вверх пишется волосной штрих; он начинается от средней линии и доводится до верхней; потом пишется прямая палочка от верхней до нижней линии с небольшим наклоном.

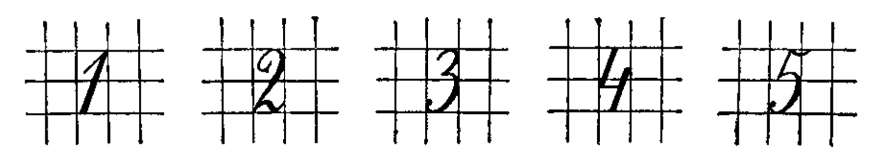


Рис. 33 а.

«2». Сначала в верхней клетке пишется «головка», начинается она посредине верхней клетки, ведётся вниз и закругляется влево, далее ведётся вверх до верхней линии и закругляется вниз, ведётся до левого угла нижней клетки, потом пишется волнистая черта. Эта цифра состоит из двух частей — «головки» и волнистой линии. Целесообразно упражнять детей в письме её отдельных элементов — «головки» и волнистой линии.

«3». Эта цифра состоит из двух элементов: верхнего полуовала и нижнего полуовала с точкой. Пишется она так: начинается недалеко от левой стороны верхней клетки, ведётся вверх, касается верхней линии клетки и закругляется вниз, касаясь правой линии, и немного не доводится до средней линии; отсюда начинается второй полуовал, который заканчивается точкой. Нижний полуовал больше верхнего; точка находится на левой стороне нижней клетки. Оба полуовала имеют справа нажим.

«4». Эта цифра состоит из трёх элементов — палочек: первая начинается от верхней стороны верхней клетки, ведётся вниз и немного заходит за среднюю линию, дальше ведётся чёрточка вправо и чуть-чуть не доходит до правой стороны клетки; затем пишется длинная палочка, начинается она немного ниже верхней стороны клетки.

«5». Эта цифра состоит из трёх элементов: небольшая палочка, полуовал с точкой внизу и узелок вверху.

Пишется она так: сначала пишется небольшая прямая палочка в верхней клетке; начинается она от верхней линии поближе к левой стороне клетки и кончается, не доходя до средней линии; потом пишется полуовал, заканчивающийся точкой, которая ставится на левой стороне клетки; наконец, сверху от прямой палочки пишется вправо узелок. Полуовал пишется с нажимом справа.

Здесь полезно поупражнять учеников в письме отдельных элементов.

«6». Цифра «шесть» состоит из большого левого полуовала с нажимом и малого правого полуовала без нажима. Начинается она от средины верхней клетки и ведётся вниз, касаясь левой стороны клетки; далее закругляется, касаясь нижней линии, и заканчивается закруглением у средней линии.

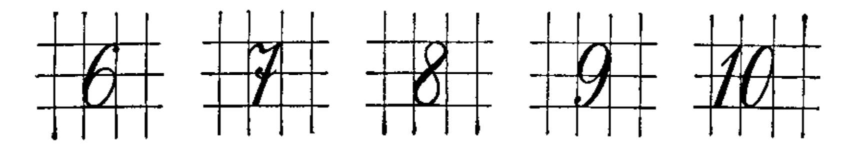


Рис. 33 б.

Есть вариант этой цифры, который начинается с точки вверху: точка делает очертание цифры более законченным, а потому и более красивым. Однако такая транскрипция не обязательна; для школы может быть принята первая форма, как более простая.

«7». Цифра «семь» состоит из трёх элементов: волнистой линии, прямой длинной палочки и узелка, пересекающего средину палочки. Начинается письмо цифры с волнистой линии, которая доводится до правого угла клетки, затем пишется прямая длинная палочка, которая посредине перечёркивается узелком.

Целесообразно поупражнять учеников в письме волнистой линии отдельно.

«8». Цифра «восемь» состоит из двух овалов — верхнего и нижнего. Начинается письмо этой цифры с левой стороны верхней клетки, ведётся черта вверх, касается верхней линии и сейчас же закругляется вниз, пересекает среднюю линию, закругляется, касаясь левой и затем нижней стороны клеток, и дальше, поднимаясь вверх, смыкается с началом верхнего овала. Нижний овал получается несколько больше верхнего. Нажим у верхнего овала — справа, у нижнего — слева.

«9». Цифра «девять» состоит из двух элементов: небольшого овала, занимающего верхнюю клетку, и большого правого полуовала, оканчивающегося точкой.

Сначала пишется овал, потом полуовал с точкой внизу. Можно поупражнять детей в письме каждого элемента в отдельности.

«10» обозначается двумя цифрами — единицей и нулём.

Показав письмо цифры на доске, полезно заставить учеников «написать» два-три раза цифру в воздухе, а потом уже в тетради. В тетради пишутся две-три строчки. Учитель в это время наблюдает за учащимися, даёт указания, как надо и как не надо писать, исправляет ошибки, пишет цифру в тетрадях учащихся. Если встретится недочёт, повторяющийся у многих учеников, учитель прерывает письмо и на доске указывает, в чём заключается этот недочёт и как его исправить.

Учитель постоянно должен следить за правильной посадкой, за правильным держанием карандаша, показывать, исправлять, объяснять. Трудности письма цифр усугубляются ещё тем, что ученики учатся писать цифры по тетрадям в клетку, где самому ученику приходится определять наклон. Чтобы облегчить ученикам письмо цифр и усвоение правильного начертания каждой цифры, можно учить детей писать цифры не по клеткам, а в косую линейку, где наклон цифры определяется наклоном линии и где многие элементы пишутся по линиям данной разлиновки (рис. 33в).

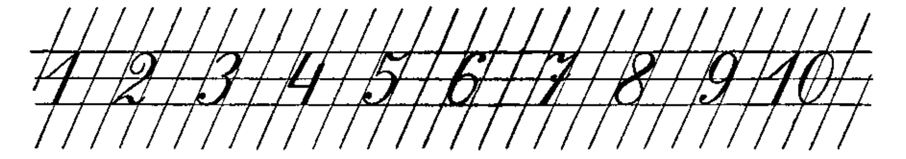


Рис. 33 в.

Когда ученики усвоят начертание каждой цифры с правильным соотношением отдельных её элементов, нужно перевести их на письмо цифр по клеткам.

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ В ПРЕДЕЛЕ 10.

В развитии вычислительных навыков сложения и вычитания ребёнок проходит 4 ступени. Первая относится к тому периоду развития арифметических представлений, когда ребёнок ещё не отделяет числа от конкретной совокупности предметов и складывает или вычитает предметы, а не числа. На этой стадии ребёнок пользуется наиболее примитивным приёмом сложения и вычитания — приёмом *пересчитывания*. Дайте семилетнему ребёнку, только что пришедшему в школу, сложить 5 кубиков и 3 кубика и посмотрите, как он будет складывать: он присоединит к 5 кубикам 3 кубика и, получив из них группу, пересчитает по одному все кубики вновь полученной группы. Предложите этому ребёнку от 6 карандашей отнять 2 карандаша и сказать, сколько карандашей осталось. Чтобы ответить на этот вопрос, ребёнок опять обратится к пересчитыванию: он отнимет карандаши по одному, считая при этом: «1, 2», а потом пересчитает остаток. Это и есть *приём пересчитывания* суммы и остатка. Он возможен только при наличии предметов и характеризует собой сло-

жение и вычитание не чисел, а предметов. Складывать и вычитать посредством пересчитывания воображаемые предметы трудно, а отвлечённые числа — невозможно.

Школа должна переключить детей на другие, более совершенные приёмы, при помощи которых можно производить сложение и вычитание не только предметов, но и чисел. Таким приёмом является приём присчитывания и отсчитывания. Это — вторая ступень в овладении сложением и вычитанием. Применению этого приёма ученик учится сначала на предметах. Учитель показывает, как, складывая 5 кубиков и 3 кубика, можно к 5 кубикам присчитать последовательно по одному два кубика, называя при присчитывании каждого кубика получаемое число: 5 кубиков да один кубик — 6 кубиков; 6 кубиков да ещё один кубик — 7 кубиков. Значит, 5 кубиков да 2 кубика будет 7 кубиков. Так же поступают и при вычитании. Но вычитание труднее сложения, так как оно даже при наличии предметов требует «двойного» счёта: отнимая три карандаша от семи карандашей, приходится рассуждать так: от 7 отнять 1 будет 6 (отняли 1 карандаш); от 6 отнять 1 будет 5 (отняли 2 карандаша); от 5 отнять 1 будет 4 (отняли 3 карандаша). Значит, от 7 отнять 3 будет 4.

Третья ступень в овладении сложением и вычитанием — это присчитывание и отсчитывание числа без предметов. Здесь и при сложении приходится пользоваться двойным счётом: с одной стороны, продолжается счёт от первого слагаемого, а с другой стороны, считаются и прибавляемые единицы. Как, например, прибавить 3 к 5? 5 да 1 будет 6 (один!); 6 да 1 будет 7 (два!); 7 да 1 будет 8 (три!). Значит, 5 да 3 будет 8. С увеличением второго слагаемого сложение становится всё труднее и труднее.

На четвёртой ступени, благодаря упражнениям, уменье складывать и вычитать переходит в навык сложения и вычитания, т. е. дети усваивают наизусть таблицу сложения, усваивают состав чисел и находят сумму сразу по памяти, без обременительного присчитывания по единице. Навык сложения и знание таблицы сложения позволяет автоматизировать вычитание. Так, например, зная, что 6 состоит из 4 и 2, ребёнок без отсчитывания легко находит, что 6—4=2 и 6—2=4.

При изучении сложения в пределе 10 нужно показать детям приём перестановки слагаемых и добиться сознательного применения его детьми. Этот приём освобождает ребёнка от присчитывания в тех случаях, когда второе слагаемое больше первого и сводит новые случаи к ранее изученным. При изучении таблицы вычитания следует научить детей пользоваться взаимосвязью между этим действием и сложением и тем самым облегчить запоминание наизусть всех разностей в пределе 10.

Изучение сложения и вычитания в пределе 10 целесообразно провести в следующем порядке: сперва изучается приём присчитывания и отсчитывания по единице, затем — приём присчитыва-

ния и отсчитывания двух, далее — трёх, потом — четырёх и т. д. Присчитывание и отсчитывание каждого числа ведётся сначала на предметах, потом на отвлечённых числах; заканчивается работа упражнениями, имеющими целью усвоить данные случаи табличного сложения и вычитания наизусть[1].

Присчитывание по единице.

Оно основано на счёте, на знании словесного числового ряда. В самом деле: один да ещё один будет два, потому что за единицей в натуральном ряде чисел следует два, 5 да 1 будет 6, потому что в ряде натуральных чисел за пятью следует шесть, и т. д.

Прибавление по единице ведётся сначала на счётах. Прибавляя на счётах шарики один за другим, учитель говорит, а дети вслед за ним повторяют: «Один да один будет два, два да один будет три, три да один будет четыре... девять да ещё один будет десять».

Вслед за этим присчитывание по единице производится на других предметах, например, на кубиках. Учитель кладёт на планку доски один кубик.

Учитель. Сколько кубиков стоит на планке доски?

Ученик. Один кубик.

Учитель кладёт ещё один кубик и говорит: «Теперь прибавим к одному ещё один кубик — сколько кубиков теперь на планке?»

Ученик. На планке два кубика.

Учитель. Значит, если к одному кубику прибавить ещё один кубик, то сколько кубиков получится?

Ученики отвечают полным ответом: «К одному кубику прибавить один кубик, получится два кубика».

Учитель (ставя на планку ещё один кубик) говорит: «К двум кубикам прибавим ещё один. Сколько кубиков получится?»

Ученики полным ответом: «К двум кубикам прибавить один кубик, получится три кубика».

Учитель (ставя на планку ещё один кубик): «К трём кубикам прибавим ещё один кубик. Сколько кубиков получится?»

Такое присчитывание по единице продолжается до десяти. Далее присчитывание ведётся на дидактическом материале.

После сложения на наглядных пособиях производится сложение отвлечённых чисел.

«К одному прибавить один — сколько будет? К двум прибавить один — сколько будет? К трём прибавить один — сколько будет?» и т. д.

Упражнения вразбивку.

«К четырём кубикам прибавить один кубик — сколько будет кубиков? К четырём палочкам прибавить одну палочку — сколько получится палочек? К четырём прибавить один — сколько получится? К восьми шарикам прибавить один шарик — сколько будет шариков? К восьми спичкам прибавить одну спичку — сколько спичек получится? К восьми прибавить один — сколько будет?»

Затем следуют задачи:

«Девочка пошла в лес за грибами. Набрала она пять грибов и положила их в корзинку. Потом нашла она ещё один гриб, положила и его в корзинку. Сколько грибов стало у неё в корзинке?»

После того как ученики решат задачу, учитель спрашивает: «Как вы узнали, что в корзинке шесть грибов?»

Ответ должен быть такой: «К пяти грибам прибавили один гриб, получилось шесть грибов». Или, короче: «К пяти прибавили один, стало шесть».

---

[1] Вопрос изложен по статье Н. С. Поповой «Развитие вычислительных навыков в пределах 20» (журн. «Начальная школа», № 6, 1947).

Запись сложения.

С записью действия сложения и его знаками учащиеся могут быть ознакомлены ещё раньше, при изучении чисел. Но если там это не сделано, то знакомство с записью сложения даётся в связи с прибавлением по одному.

Обучение детей записи сложения ведётся примерно так:

«К трём шарикам прибавить один шарик. Сколько будет шариков?» (К трём шарикам прибавить один шарик, будет 4 шарика.)

«Смотрите, дети, как я запишу это: «К трём (пишет цифру 3) прибавить (пишет знак сложения) один (пишет цифру 1) будет (пишет знак равенства) четыре (пишет цифру 4)».

На доске получилась запись: «$3 + 1 = 4$».

«Смотрите, что я буду показывать, и слушайте, что я буду говорить: к трём (показывает цифру 3) прибавить (показывает знак сложения) один (показывает цифру 1) будет (показывает знак равенства) четыре (показывает цифру 4)».

После этого дети читают записанный на доске пример хором и в одиночку. Когда ученики научатся правильно читать запись сложения, учитель обращает их внимание на то, как пишутся знак сложения и знак равенства. «Вместо слова «прибавить» пишут прямой крестик (+). Вместо слова «будет» пишут между цифрами две чёрточки (=)».

Затем учитель предлагает ученикам записать пример на сложение: к шести прибавить один будет семь. Один ученик пишет на доске, остальные в тетрадях. Пишут по частям, с объяснениями, с остановками.

«Что сначала напишете?» (Цифру 6.) «Пишите! Что дальше надо написать?» (Прибавить.) «Как напишете слово «прибавить?» (Прямой крестик.) «Пишите!»

После этого дети хором и в одиночку читают всё написанное ими: «К шести прибавить один будет семь». Далее учитель предлагает ученикам самим придумать пример и записать его.

Заканчивается урок тем, что учитель диктует примеры на сложение, а дети пишут их в своих тетрадях.

В дальнейшем ученики будут приучены к тому, что знак сложения означает не только слово «прибавить», но и «сложить», «присчитать», «да», «ещё»; знак равенства означает не только «будет», но и «получится», «равняется». На первых же порах, пока впервые объясняются эти знаки, им приписывается значение только двух терминов — «прибавить» и «будет».

Отсчитывание по единице.

Упражнения в отсчитывании по единице проводятся так же, как и упражнения в присчитывании по единице, т. е. на тех же пособиях и в той же последовательности.

Учитель откладывает на счётах десять шариков и предлагает детям сосчитать их. Затем, медленно отодвигая один шарик, говорит: «От десяти отнять один, сколько останется?» Дети дают полный ответ: «От десяти отнять один, останется девять».

Далее, отодвигая ещё один шарик, учитель говорит: «От девяти шариков отнять один шарик, сколько останется?» Дети отвечают: «От девяти шариков отнять один, останется восемь шариков» и т. д.

Такое же отсчитывание по единице производится и на других предметах, например, на кубиках.

То, что учитель делает на счётах, дети проделывают на своём дидактическом материале.

Дальше отнимание по единице производится на отвлечённых числах.

«Будем отнимать по одному, начиная с 10. От 10 отнять 1 будет 9. От 9 отнять 1 будет 8. От 8 отнять 1 будет 7» и т. д.

После этого отсчитывание по единице происходит вразбивку.

«От восьми отнять один, сколько останется? От шести отнять один, сколько останется? От трёх отсчитать один, сколько будет?» и т. д.

Затем следуют задачи:

«На тарелке лежало 10 яблок. Одно яблоко взяла девочка. Сколько яблок осталось на тарелке?»

«У мальчика было 3 карандаша. Один карандаш он исписал. Сколько карандашей осталось у мальчика?»

После того как задача будет повторена и решена, нужно спрашивать: «Как вы узнали, что осталось 9 яблок?» «Как вы узнали, что у мальчика осталось два карандаша?»

Ученики должны отвечать так: «От 10 яблок отняли одно яблоко, осталось 9 яблок». «От трёх карандашей отняли один карандаш, осталось два карандаша». (О решении задач см. выше.)

Запись вычитания.

Здесь своевременно (если это не сделано раньше) познакомить учеников с тем, как записывается вычитание (в данном случае — отсчитывание по единице). В качестве исходного момента можно взять только что решённую задачу о яблоках.

«Запишем решение нашей задачи на доске,— говорит учитель и при этом пишет 10 и рядом 1.— Что надо сделать, чтобы узнать, сколько яблок осталось?» (От десяти отнять один.) «Вместо слова «отнять» пишут чёрточку, а вместо «останется» — две чёрточки».

Получается запись: $10 - 1 = 9$, которую учитель читает медленно, сопровождая каждое слово показом соответствующей цифры и знака: «От десяти отнять один, останется девять». Вместо «останется» можно прочитать «получится» или «будет». Однако сразу давать все эти термины не следует, их надо вводить постепенно.

Письмо знаков сложения, вычитания и равенства, подобно письму цифр, должно быть аккуратным. Знак сложения

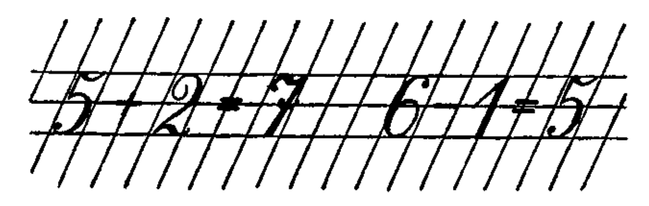


Рис. 34.

надо писать в виде прямого крестика с чертами одинаковой толщины. Знак равенства следует писать двумя равноотстоящими чертами, не очень сближая и не слишком отдаляя их одну от другой (рис 34).

Сложение и вычитание вразбивку.

Когда ученики усвоят сложение и вычитание по единице каждое в отдельности, нужно поупражняться в этих действиях вразбивку, проводя эти упражнения на наглядных пособиях, на отвлечённых числах и на решении задач. Известно, что на первых порах дети склонны смешивать знаки плюс и минус: записав пример на сложение со знаком плюс, они иногда производят вычитание, и наоборот. Чтобы дать хорошую ориентировку в этих знаках, чтобы прочнее связать операции сложения и вычитания с их внешними обозначениями (прямой крестик и черта), следует давать примеры на эти действия вразбивку, переключая внимание ученика с одного действия на другое.

Прибавление и отнимание по два.

На этом случае сложения надо показать детям основной вычислительный приём, характерный для всего первого десятка, который заключается в том, что прибавление группы единиц сводится к присчитыванию по единице.

Учитель откладывает на счётах 4 шарика, затем несколько поодаль 2 шарика и говорит:

«Прибавим к четырём шарикам два шарика. Как это сделать? К четырём шарикам прибавим сначала один шарик. Сколько получится?» (К четырём прибавить один, получится пять шариков.) «Теперь сколько остаётся ещё прибавить?» (Остаётся прибавить ещё один шарик.) «К пяти шарикам прибавим ещё один шарик. Сколько получится шариков?» (К пяти шарикам прибавить один шарик, получится шесть шариков.)

«Сколько же всего шариков мы прибавили?» (Два шарика.) «Значит, к четырём прибавить два, сколько получится?» (К четырём прибавить два, получится шесть.) Ответ повторяется хором и в одиночку.

«Как мы к четырём прибавили два?» (Мы сначала прибавили один, потом ещё один, а всего два.)

Так же подробно изучаются вычислительные приёмы прибавления двух к двум, к четырём, к шести, к восьми (2+2, 4+2, 6+2, 8+2). Упражнения на классных счётах сменяются сложением на кубиках, на палочках, на кружочках и прочем дидактическом материале, который имеется на руках у учащихся.

Далее решаются задачи, в которых приходится прибавлять по два, а заканчивается этот раздел отвлечённым счётом: «К двум прибавить два, будет четыре; к четырём прибавить два, будет шесть; к шести прибавить два, будет восемь; к восьми прибавить два, будет десять». Это же упражнение, счёт двойками, производится дальше ещё короче: «Два, четыре, шесть, восемь, десять».

Следующий этап работы: отнимание двух от всех чётных чисел, а именно: 10—2, 8—2, 6—2, 4—2, 2—2. Вычислительный приём вычитания двух показывается на счётах так же, как и приём прибавления двух.

Теперь остаётся ещё поупражнять детей в прибавлении и отнимании по два от нечётных чисел: 1+2, 3+2, 5+2, 7+2.

В вычислительных приёмах здесь не встретят дети ничего нового, но случаи эти усваиваются учащимися труднее и медленнее, поэтому на них надо остановиться особо и проделать достаточно много упражнений на наглядных пособиях, на задачах и отвлечённых примерах. Завершаются упражнения решением письменных примеров на сложение и вычитание по 2.

Прибавление и отнимание по три и по четыре.

Новым в данном случае является то, что здесь дети впервые встречаются с приёмом прибавления и отнимания группами единиц. 3 — это 2+1. Поэтому, чтобы прибавить 3, достаточно прибавить 2 и потом ещё 1. Или, наоборот, прибавить сначала 1, а потом ещё 2. Значит, если дано к 5 прибавить 3, то ученик может воспользоваться одним из следующих трёх приёмов: а) прибавить 3 по одному; 5+1=6; 6+1=7; 7+1=8; б) к пяти прибавить сначала 2, потом 1; 5+2=7; 7+1=8; в) к пяти прибавить сначала 1, потом 2; 5+1=6; 6+2=8.

4 — это 2 и ещё 2; поэтому, чтобы прибавить 4, можно прибавить сначала 2, потом ещё 2. Чтобы отнять 4, можно отнять 2 и ещё раз 2.

Порядок изучения этой части таблицы сложения и вычитания будет таков:

1)	3 + 3 = 6	6 + 3 = 9	
	9 − 3 = 6	6 − 3 = 3	3 − 3 = 0
2)	1 + 3 = 4	4 + 3 = 7	7 + 3 = 10
	10 − 3 = 7	7 − 3 = 4	4 − 3 = 1
3)	2 + 3 = 5	5 + 3 = 8	
	8 − 3 = 5	5 − 3 = 2	

Изучение сложения и вычитания по 3 и по 4 ведётся сначала на наглядных пособиях и дидактическом материале, потом на задачах и, наконец, на отвлечённых числах. В результате этих упражнений учащиеся должны усвоить все эти случаи наизусть.

Прибавление и отнимание по пяти, шести, семи, восьми и девяти.

На этих случаях сложения легко показать целесообразность использования переместительного свойства сложения. На рассмотрении ряда конкретных примеров дети подводятся к выводу: если к меньшему числу нужно прибавить большее, то можно поступить наоборот, т. е. прибавить к большему числу меньшее; так складывать скорее и легче, а результат от этого не меняется. Это показывается на наглядных пособиях.

На классных счётах учитель откладывает один шарик и поодаль пять шариков.

«Прибавим к одному пять. Как будем прибавлять?» (По одному: к одному прибавить один, будет два; к двум прибавить один, будет три и т. д.) «Значит, если к одному прибавить пять, то сколько будет?» (К одному прибавить пять, будет шесть.) «Запишем это, 1 + 5 = 6».

Далее, отложив на счётах те же один шарик и пять шариков, учитель предлагает к пяти шарикам прибавить один шарик. Получается шесть шариков. Учитель записывает произведённое сложение: 5 + 1 = 6. «В первый раз мы прибавляли к о д н о м у пять, получилось шесть, во второй раз прибавили к п я т и один, получилось тоже шесть. Выходит, прибавить к одному пять всё равно, что прибавить к пяти один. А что скорее, легче прибавлять — к одному пять или к пяти один?» (К пяти легче и скорее прибавить один, чем к одному пять.)

Проделав на счётах и дидактическом материале ещё два примера (1+6=6+1; 1+7=7+1), ученики делают вывод: когда нужно к меньшему числу прибавить большее, то легче и скорее прибавить к большему числу меньшее.

Далее при присчитывании 6, 7, 8 и 9 нужно пользоваться всецело переместительным свойством сложения.

После этого ученикам предлагается решить на их дидактическом материале несколько примеров и задач.

При вычитании по пяти, шести, семи и восьми основным вычислительным приёмом служит приём отнимания группами: например, чтобы вычесть 5 из 9, учащийся может отнять сначала 3, потом 2.

Для облегчения операции вычитания в тех случаях, когда уменьшаемое и вычитаемое числа, близкие между собой, целесообразно научить учеников пользоваться п р и ё м о м д о п о л н е н и я. Пусть требуется от 9 отнять 7. Отнимание по единице или группами единиц приводит к длинным, громоздким, а потому и трудным вычислениям. Но процесс вычисления делается сразу лёгким, как только ученики используют дополнение вычитаемого до уменьшаемого. Кроме того здесь можно опереться на знание учащимися состава числа.

«9 состоит из семёрки и ещё какого числа?» (Из семёрки и д в о й к и.) «Значит, если от 9 отнять семёрку, то какое число должно остаться?» (Двойка.)

«От 9 отнять 7, сколько получится?»

Пусть требуется от 7 отнять 5.

«7 состоит из пятёрки и ещё какого числа?» (Из пятёрки и двойки.)

«Значит, сколько останется, если от 7 отнять 5? Отнимите на своих палочках 5 от 7. Сколько получится?»

Так же решаются примеры: 10—8; 8—7; 9—6; 5—4; 7—6; 6—4 и др., словом, те примеры, в которых остаток меньше вычитаемого.

Усвоение таблицы сложения и вычитания наизусть. Виды упражнений.

Изучая сложение и вычитание в пределе первого десятка, ученики должны не только овладеть вычислительными приёмами, но и усвоить таблицу сложения и вычитания наизусть, чтобы находить результаты сложения и вычитания, не вычисляя. Это может быть достигнуто благодаря достаточно большому количеству упражнений, тренировке, большой вычислительной практике. Уче-

никам должна быть дана установка на запоминание таблицы. Речь, конечно, идёт не о механическом заучивании, а о сознательном усвоении того, что наглядно воспринято и понято. Упражнения должны быть разнообразны по форме. Они могут быть следующих видов.

Устное решение примеров. Примеры могут даваться для устного счёта в начале урока. Пройдя, например, сложение и вычитание по 3, учитель может предложить ученикам следующие вопросы:

«Сколько будет 2 да 3? 3 да 3? 5 да 3? 4 да 3? 1 да 3? 6 да 3? Сколько будет 8 без 3? 5 без 3? 6 без 3?» и т. д.

В случае ошибочных ответов учитель спрашивает, как ученик складывал или вычитал, и, если нужно, требует показа действия на классных счётах.

Письменное решение примеров. Примеры могут даваться в одно, два действия, например:

1) $5+4$ 2) $3+7-4$
$8-6$ $8-6+7$

Промежуточные вычисления производятся в сложных примерах устно, и записывается только окончательный результат. Некоторые примеры даются для усвоения вычислительных приёмов.

Например: 1) $6+2+2=$; $6+4=$; 2) $8-2-1=$; $8-3=$.

Решение задач. На этой ступени решаются задачи в одно действие. Решение некоторых задач записывается. Подавляющее же большинство решается устно. (О методике решения задач см. стр. 74.)

Беглый устный счёт. Так называется цепь арифметических действий, в которой результат предыдущего действия становится данным для следующего действия.

Упражнения при этом предлагаются в следующей форме: «К 5 прибавить 4 (пауза); к полученному прибавить 1 (короткая пауза); от полученного отнять 6 (пауза); от того, что получится, отнять 2. Сколько получилось?»

Этот же пример можно дать и короче: «К 5 прибавить 4 (пауза), прибавить 1 (пауза), отнять 6 (пауза), отнять 2. Сколько получилось?» Примеры даются в несколько звеньев. На первых порах можно ограничиться 3—4 звеньями. (Подробнее о беглом счёте см. стр. 130.)

Игровые упражнения. Когда дети впервые приступают к изучению арифметики, очень важно построить упражнения так, чтобы они были интересными для детей. Тогда дети будут заниматься арифметикой с увлечением, проделают незаметно для себя множество упражнений и приобретут твёрдые навыки. Из игр на этой ступени обучения полезно проводить игры: в лото, в занимательные квадраты, в круговые примеры, в молчанку (см. выше).

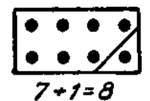
Все эти игры хороши в том отношении, что на них учащиеся проделывают массу упражнений, а это и нужно для хорошего овладения первым десятком.

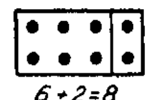
В конце работы над первым десятком даётся несколько упражнений, при помощи которых закрепляется знание состава чисел первого десятка. К таким упражнениям относятся следующие:

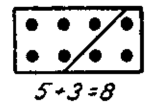
Решение примеров, сгруппированных по числам и раскрывающих состав каждого числа из слагаемых. Например, на число «8» даются следующие примеры:

7 + 1 = 8	6 + 2 = 8	5 + 3 = 8	4 + 4 = 8
8 − 1 = 7	8 − 2 = 6	8 − 3 = 5	8 − 4 = 4
1 + 7 = 8	2 + 6 = 8	3 + 5 = 8	
8 − 7 = 1	8 − 6 = 2	8 − 5 = 3	и т. д.

Эти примеры можно иллюстрировать числовыми фигурами. Например, состав числа «8», в соответствии с вышеуказанными примерами, иллюстрируется так (рис. 35):







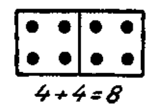


Рис. 35.

Решение примеров с вопросительным знаком. Например: 6+?=8; ?+4=7. Эти примеры читаются так: «К шести сколько надо прибавить, чтобы получилось 8?» Второй пример читается так: «К какому числу надо прибавить 4, чтобы получилось 7?» Решаются они на основании знания состава чисел.

Решая первый пример, ученик рассуждает так: «Восемь — это шесть да ... два. Поэтому к шести надо прибавить два, чтобы получилось восемь». Записав пример, он внизу под этим примером пишет его решение:

6 + ? = 8
6 + 2 = 8

Решение таких примеров является хорошим упражнением для усвоения состава чисел первого десятка.

Для этой же цели нужно использовать упражнения с монетами. Каждый учащийся должен иметь у себя набор моделей монет, сделанных из плотной бумаги или картона. Учитель даёт ученикам задание: «Разменять гривенник на более мелкие монеты». Интересно сопоставить по выполнении этого задания полученные результаты у разных учеников. Оказывается, что это задание может быть выполнено очень многими способами, например:

1 коп. 1 коп. 1 коп. 1 коп. 1 коп. 1 коп. 1 коп. 1 коп. 1 коп. 1 коп. (гривенник).
2 коп. 2 коп. 2 коп. 2 коп. 2 коп. (гривенник)
3 коп. 3 коп. 3 коп. 1 коп. (гривенник)
3 коп. 3 коп. 2 коп. 2 коп. (гривенник)
5 коп. 3 коп. 2 коп. (гривенник)
5 коп. 5 коп. (гривенник) и т. д.

Можно дать задание набрать из монет 8 коп. и записать это в виде сложения. Получится:

1) $5+3=8$	$1+1+1+5=8$
2) $3+3+2=8$	$1+1+2+2+2=8$
3) $5+2+1=8$	
4) $2+2+2+2=8$	и т. д.

Примерное содержание контрольной работы на сложение и вычитание в пределе 10.

1) $3+2=$	5) $7-3=$	9) $1+9=$
2) $6-4=$	6) $4+3=$	10) $3-2=$
3) $6+3=$	7) $9-4=$	11) $2+8=$
4) $8-4=$	8) $5+5=$	12) $9-7=$

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

ВТОРОЙ ДЕСЯТОК.

Обучаясь счёту в пределе 20, учащийся получает первое представление о десятичной группировке единиц (десять единиц составляют десяток), а обучаясь записи чисел второго десятка, он впервые сталкивается с поместным значением цифр (на первом месте справа пишутся единицы, на втором — десятки).

В этом концентре заканчивается изучение таблицы сложения и таблицы вычитания, работа над которыми начата в первом десятке. Обе эти таблицы усваиваются учащимися наизусть. Складывая и вычитая числа в пределе 20, ученик получает первое знакомство с вычислительными приёмами, основанными на десятичной группировке единиц. В пределе 20 ученик получает первоначальное знакомство с умножением и делением в их наиболее конкретной форме.

Всё это даёт основания для выделения второго десятка в особый концентр.

Второй десяток изучается в следующем порядке: счёт и запись чисел до 20; сложение и вычитание до 20; умножение и деление до 20.

НУМЕРАЦИЯ В ПРЕДЕЛЕ 20.

Устная нумерация.

Понятие о десятке. Учитель предлагает ученикам вынуть палочки, отсчитать десять палочек и связать их в пучок.

«Сколько палочек в вашем пучке?» (Десять палочек.) «Десять иначе называют десятком. Вместо слов «десять палочек» можно сказать иначе: «десяток палочек».

«Повторите, как иначе называют «десять». Вместо слов «десять палочек» как можно иначе сказать?»

Далее учитель вызывает одного ученика к классным счётам и предлагает ему отсчитать десять шариков.

«На проволоке десять шариков. Как можно иначе сказать, сколько на проволоке отложено шариков?» (Десяток шариков.)

Отсчитав десять кубиков и вынув из арифметического ящика брусок, разделённый на десять частей (кубиков), учитель говорит: «В бруске десять кубиков (пересчитывает). Значит, брусок сколько кубиков заменяет?» (Десяток кубиков.)

«Да, брусок заменяет десяток кубиков. Вместо десятка кубиков будем брать брусок. Когда предметы считают по одному, то каждый предмет называют единицей. Но некоторые предметы считают не по одному, не единицами, а по десяти, или десятками. Вспомните, что считают десятками». (Яблоки, яйца, огурцы, деньги и др.).

Образование чисел от 11 до 20. «Будем считать кубики дальше: посмотрим, какие числа будут получаться. Для удобства возьмём брусок, заменяющий десяток кубиков, и к нему будем присчитывать по одному кубику, по единице.

Положим один кубик на брусок, на десять. Получится: один-на-десять, или один-на-дцать. (Вместо «десять» говорят «дцать»). Присчитаем ещё один кубик. Получится два кубика и десять: два-на-десять или две-на-дцать, или двенадцать. Присчитаем ещё один кубик. Получится три кубика и десять: три-на-десять, или три-на-дцать, тринадцать... Присчитаем ещё один (девятый) кубик. Получится девять кубиков и десять: девять-на-десять, или девять-на-дцать, девятнадцать. Присчитаем ещё один (десятый) кубик. Получится десять и десять кубиков, или два-десять, двадцать».

В этом словообразовании и окончательном назывании чисел дети могут принимать самое деятельное участие, так как большинству их счёт до 20 известен. Учитель только подчёркивает составные части числительных, указывающие на состав числа. Заканчивается этот этап нумерации образованием чисел из десятка и любых групп единиц вразбивку на дидактическом материале — палочках и пучках палочек.

«Составьте из десятка (пучка) и единиц (палочек) число 15; число 17; число 14; число 12 и т. д. Как вы составляли эти числа? Как называется число, состоящее из десятка и пяти единиц? из десятка и восьми единиц? из десятка и одной единицы? из десятка и шести единиц?» и т. д.

Счёт до 20. «Будем считать по порядку на классных счётах от 10 до 20». Учитель откладывает шарики, а учащиеся хором считают: «Десять, одиннадцать, двенадцать, тринадцать... восемнадцать, девятнадцать, двадцать». Так же ведётся обратный счёт: «Двадцать, девятнадцать, восемнадцать... двенадцать, одиннадцать, десять».

Разложение данного числа на десятки и единицы. «Восемнадцать! Сколько в этом числе десятков и сколько единиц? Четырнадцать! Сколько в этом числе десятков и сколько единиц? Сколько десятков и сколько единиц в числе 17? в числе 19? в числе 11? в числе 13?» и т. д.

Письменная нумерация.

Объяснение письменной нумерации нужно провести конкретно на наглядных пособиях.

Учитель приносит в класс одиннадцать числовых фигур, заполненных чёрными и белыми кружочками, с надписанными числами (рис. 36). Фигуры рассматриваются; устанавливается, что в левой клетке во всех фигурах один десяток кружочков, а в правой клетке разное число белых кружочков — один, два, три, четыре и т. д. Рассматриваются записи, сделанные внизу фигур: в первой фигуре десяток чёрных кружочков, белых — нет; записан «деся-

ток» так: цифра один слева, нуль — справа; нуль показывает, что единиц нет. Во второй фигуре всего одиннадцать кружочков; десяток чёрных, один белый. Записано «одиннадцать» так: цифра один слева означает один десяток, и цифра один справа означает одну единицу. В третьей фигуре всего двенадцать кружочков; записано число «двенадцать» так: цифра один слева означает один десяток, цифра два справа означает две единицы.

Аналогичным образом рассматриваются и все другие числовые фигуры. После этого полезно провести и такое упражнение. Ученики получают небольшие квадратные карточки, разделённые пополам. В квадрате записано число 10. Единица отделена от нуля вертикальной чертой. Ученикам даются разрезные цифры. На место нуля они по заданию учителя кладут одну за другой

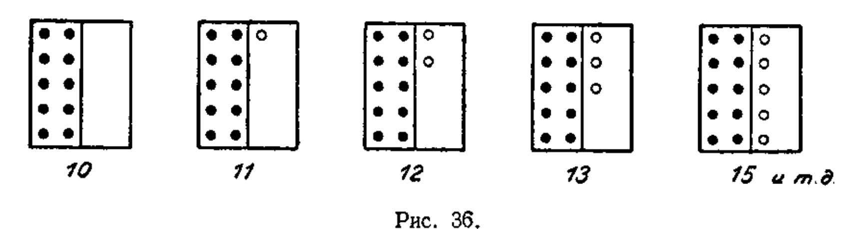


Рис. 36.

разные цифры и получают разные числа. Полученные числа они читают, потом составляют эти числа из пучка-десятка и отдельных палочек.

После этого учитель пишет на доске числа второго десятка, называя каждое из них:

11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

Ученики пишут эти числа в своих тетрадях.

Записав эти числа, учитель подвергает три числа (например, числа 12, 15, 18) анализу:

«Из ч е г о состоит число 12?» (Из одного десятка и двух единиц.) «Сколькими цифрами записано это число?» (Двумя цифрами.) «Что означает каждая цифра?» (2 означает две единицы, 1 — один десяток.) «Два стоит на п е р в о м месте справа, 1 — на в т о р о м месте. Единицы поставлены справа, десяток — слева».

Так разбирается второе и третье число. После этого анализируются числа 10, 20, 11.

«Из чего состоит число 10? число 20?» (10 — из одного десятка, 20 — из двух десятков.) «Что на месте единиц написано в этих числах?» (Нуль.)

«Е с л и е д и н и ц н е т, т о н а и х м е с т е п и ш у т н у л ь. Н у л ь п о к а з ы в а е т, ч т о е д и н и ц н е т».

«Число 11. Из чего состоит это число? Где здесь единицы, где десятки?»

После этого делается обобщение: «При записи чисел единицы пишут на первом месте справа, десятки — на втором месте. Если единиц нет, то на их месте ставят нуль».

Учащиеся должны получить отчётливый зрительный образ натурального ряда чисел в пределе 20, они должны хорошо знать место каждого числа в этом ряде, взаимное положение чисел. Этой цели способствуют следующие упражнения.

Ученики записывают числовой ряд в две строки:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Пользуясь этим рядом, ученики упражняются в прямом и обратном счёте по 1, по 2, по 3, по 4, по 5. То же они проделывают и на линейках, с деления-

ми, читая числа от 0 до 20. Ученики определяют, на сколько одно число больше или меньше другого: на сколько 6 больше 5, 7 меньше 8 и т. д.

Хорошее знание числового ряда окажет ученикам существенную помощь при изучении сложения и вычитания.

В первом классе учительницы М. А. Бобрищевой (Новгородская обл.) решали задачу: «Было 17 огурцов. За обедом 14 огурцов съели. Сколько огурцов осталось?»

Один мальчик решил эту задачу мгновенно: «Осталось 3 огурца,— сказал он,— пятнадцатый, шестнадцатый, семнадцатый». Живое воображение помогло мальчику остроумно использовать знание числового ряда.

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ В ПРЕДЕЛЕ 20.

В сложении и вычитании чисел в пределе 20 нужно различать два основных случая.

Первый случай: сложение однозначных чисел, например: 8+7, 6+9 и др. и соответствующее ему вычитание, например: 15—7, 18—9 и др. Такое сложение и вычитание носит название сложения и вычитания с переходом через десяток.

Второй случай: сложение двузначного числа с однозначным, например: 14 + 5, 12 + 8 и соответствующие им случаи вычитания, например: 18—6, 17—3 и др. Это сложение и вычитание иначе называется сложением и вычитанием без перехода через десяток.

Изучая второй десяток, нужно изучить сначала сложение и вычитание без перехода через десяток, а потом сложение и вычитание с переходом из одного десятка в другой. При обучении детей сложению и вычитанию без перехода через десяток все случаи этого сложения и вычитания группируются по сходству вычислительных приёмов и изучается не каждый пример, а каждый приём в отдельности.

Что же касается сложения однозначных чисел с переходом через десяток, то здесь учащимся показывается вычислительный приём и требуется от них знание каждого случая сложения наизусть. Учащиеся в конце концов должны уметь, не задумываясь и без промедления, отвечать на вопросы: сколько будет 9 да 3? 8 да 6? 7 да 8? 4 да 9? 6 да 7? и т. д. Эти и подобные им примеры входят в содержание таблицы сложения, которую учащиеся должны знать напамять. Знание таблицы сложения помогает усвоению таблицы вычитания.

Таблица сложения.

9 + 2 = 11	8 + 3 = 11	7 + 4 = 11	6 + 5 = 11	5 + 6 = 11	3 + 8 = 11
9 + 3 = 12	8 + 4 = 12	7 + 5 = 12	6 + 6 = 12	5 + 7 = 12	3 + 9 = 12
9 + 4 = 13	8 + 5 = 13	7 + 6 = 13	6 + 7 = 13	5 + 8 = 13	2 + 9 = 11
9 + 5 = 14	8 + 6 = 14	7 + 7 = 14	6 + 8 = 14	5 + 9 = 14	
9 + 6 = 15	8 + 7 = 15	7 + 8 = 15	6 + 9 = 15	4 + 7 = 11	
9 + 7 = 16	8 + 8 = 16	7 + 9 = 16		4 + 8 = 12	
9 + 8 = 17	8 + 9 = 17			4 + 9 = 13	
9 + 9 = 18					

Таблица вычитания.

11 — 2 = 9	12 — 3 = 9	13 — 4 = 9	14 — 5 = 9	16 — 7 = 9
11 — 3 = 8	12 — 4 = 8	13 — 5 = 8	14 — 6 = 8	16 — 8 = 8
11 — 4 = 7	12 — 5 = 7	13 — 6 = 7	14 — 7 = 7	16 — 9 = 7
11 — 5 = 6	12 — 6 = 6	13 — 7 = 6	14 — 8 = 6	17 — 8 = 9
11 — 6 = 5	12 — 7 = 5	13 — 8 = 5	14 — 9 = 5	17 — 9 = 8
11 — 7 = 4	12 — 8 = 4	13 — 9 = 4	15 — 6 = 9	
11 — 8 = 3	12 — 9 = 3		15 — 7 = 8	
11 — 9 = 2			15 — 8 = 7	
			15 — 9 = 6	

Сложение и вычитание без перехода через десяток.

Наглядными пособиями могут служить классные счёты, кубики и брусок, палочки и пучок палочек, линейки с сантиметровыми делениями.

Объяснение вычислительных приёмов, при помощи которых решаются примеры этой группы, даётся в следующем порядке.

1) **К полному десятку прибавляется несколько единиц или к единицам прибавляется десяток,** например: 10 + 4, 6 + 10. Сложение в этом случае производится на основании знания нумерации.

Второй пример решается на основании переместительного свойства сложения: к 6 прибавить 10 — всё равно, что к 10 прибавить 6.

Этому случаю сложения соответствует тот случай вычитания, когда от двузначного числа отнимаются его единицы или отнимается десяток, например: 18 — 8, 15 — 10. Вычитание в данном случае основано на знании десятичного состава чисел.

Вычитая 8 из 18, ученик рассуждает так: 18 состоит из десятка и восьми единиц, поэтому, если от 18 отнять 8, останется 10.

2) **К двузначному числу прибавляется однозначное число и наоборот,** например: 16+2, 4+15.

Для пояснения приёма сложения в данном случае число 16 составляется из бруска и шести кубиков. Чтобы прибавить к этому числу 2 кубика, ясно, что 2 нужно прибавить к 6 и полученное число 8 нужно прибавить к 10.

Сложение 4 и 15 выполняется на основании перестановки слагаемых.

Этому случаю сложения соответствует тот случай вычитания, когда от двузначного числа нужно отнять несколько единиц, например: 17 — 5. Приём вычитания в данном случае поясняется на бруске и кубиках. Составляется число 17 из бруска-десятка и 7 кубиков. Чтобы от этого числа отнять 5 кубиков, ясно, что 5 нужно отнять от 7: останется десяток и 2, т. е. 12.

3) **Прибавление к двузначному числу однозначного и наоборот, когда в результате получается 20,** например: 16 + 4; 8 + 12.

Чтобы сложить 16 и 4, сначала надо сложить 6 и 4, получается десять, или десяток. Десяток да десяток, будет два десятка, или 20. Пояснить это сложение можно на бруске и кубиках или на палочках, которые связываются в пучок, когда при сложении образуется полный десяток (десяток кубиков заменяется бруском, получается в итоге два бруска-десятка). Сложение 8 и 12 производится с помощью перестановки слагаемых.

Соответствующие случаи вычитания 20 — 4, 20 — 12 поясняются на палочках или на брусках арифметического ящика. Чтобы отнять от двух пучков-десятков четыре палочки надо один пучок развязать и от 10 палочек отнять 4 палочки. Останется 6 палочек и один нетронутый десяток, а всего 16. При отнимании 12 из 20 приходится один десяток сбрасывать целиком, а другой развязывать и из 10 палочек брать 2 палочки. Дети учатся пользоваться десятичным составом числа.

4) **Последним упражнением будет вычитание двузначного числа из двузначного,** например: 18—12. Это наиболее трудный для детей случай вычитания. Его нужно объяснить особенно тщательно. На счётах откладывается 10 шариков на одной проволоке и 8 — на другой. Сначала сбрасывается 10 шариков на первой проволоке, а затем от 8 отнимается 2. Проделывается ещё пример: 16—13 на брусках и на кубиках. Берётся один брусок и 6 кубиков. 13 отнимается так: вычитается сначала брусок-десяток, а потом 3 из 6. Дети проделывают это упражнение на своём дидактическом материале.

При вычитании двузначных чисел весьма полезно провести работу с натуральным рядом чисел, записанным в тетрадях и на доске, и на линейке с сантиметровыми делениями. На этой линейке надо показать, что прибавление единицы есть переход к следующему числу в числовом ряде, прибавление двух есть переход к числу, стоящему за следующим числом, и т. д. Прибавляя или вычитая 1 и 2, результат отыскивается путём продвижения вправо или влево по числовому ряду. В результате этого дети усвоят места чисел в числовом ряде, их взаимное положение, и когда им придётся вычитать, например, 14 из 15, они это сделают на основании хорошего знания числового ряда, не прибегая к «вычислительному приёму», который нередко приводит их к ошибкам.

Сложение и вычитание с переходом через десяток.

Приём сложения двух однозначных чисел, сумма которых больше 10, состоит в том, что первое слагаемое дополняется до 10 и к полученному десятку прибавляются оставшиеся единицы второго слагаемого. От ученика в данном случае требуется понимание приёма вычисления и уменье разложить второе слагаемое на два таких числа, из которых одно служило бы дополнением первого слагаемого до 10. Так, складывая 8 и 7, ученик должен: а) знать, сколько единиц нехватает у 8 до 10, и б) уметь

быстро разложить число 7 на два таких числа, из которых одно было бы 2, а другое 5.

Чтобы учащиеся поняли вычислительный приём, его надо показать на таком наглядном пособии, которое своей конструкцией толкало бы ученика к использованию приёма, отвечающего требованиям десятичной системы счисления. Такими

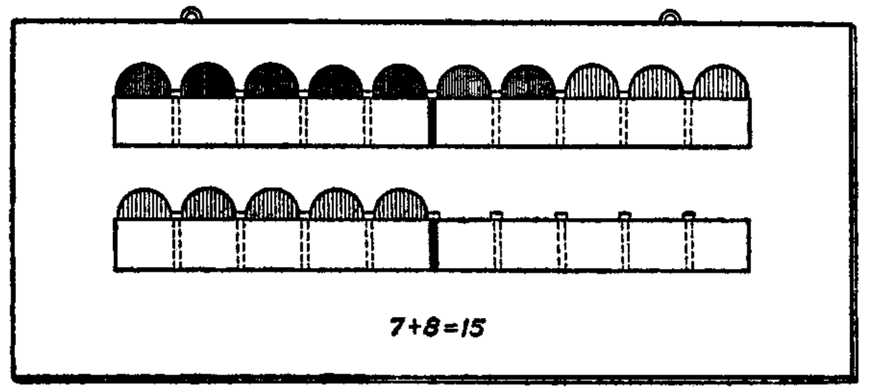


Рис. 37.

пособиями являются классные счёты или, что ещё лучше, счётные таблицы с большими цветными картонными кругами (рис. 37).

Расположив в «гнёздах» верхнего ряда первое слагаемое, ребёнок видит, сколько ещё свободных мест осталось в этом десятке. Прибавляя второе слагаемое, он волей-неволей разбивает его на такие два числа, из которых одно дополняет первое слагаемое до 10.

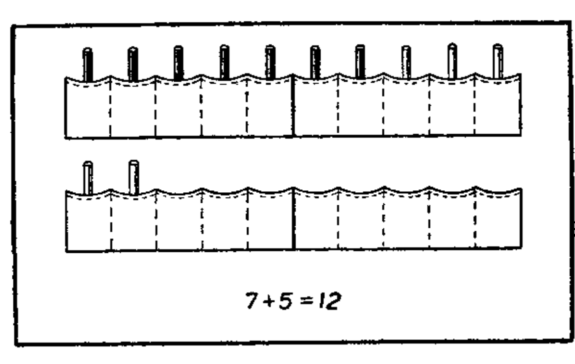


Рис. 38.

В качестве первого, исходного примера можно взять вышеназванный пример 8+7 и показать сложение на классных счётах с двумя проволоками.

«Отложим на счётах 8 шариков и прибавим к ним 7 шариков. Сколько можно прибавить к 8 на этой же проволоке?» (2 шарика.) «Сколько шариков остаётся ещё прибавить?» (5 шариков.) «Отложим 5 шариков на второй проволоке. Сколько всего шариков получилось?» (Десять да пять — пятнадцать.) «Повторите, как мы прибавили 7 к 8». (Сначала прибавили 2 шарика, чтобы

получилось 10. Потом 5 прибавили к 10, получилось 15.) «Сколько же будет 8 да 7?» (15.)

Далее все учащиеся проделывают это упражнение на своём дидактическом материале — счётных таблицах.

Даётся задание: к 7 прибавить 5.

Ученики вставляют в гнёзда таблицы сначала 7 палочек, занимая ими 7 мест (рис. 38).

«Сколько всего палочек может поместиться в верхнем ряду таблицы?» (10 палочек.)

«Сколько же палочек надо прибавить к 7, чтобы получилось 10?»

Учащиеся отвечают на этот вопрос и вставляют 3 палочки.

«Сколько всего палочек надо прибавить?» (5.)

«Сколько палочек остаётся ещё прибавить?» (2.)

Учащиеся вставляют в гнёзда нижнего ряда таблицы две палочки.

«Сколько же всего палочек получилось?» (12.)

«Как вы это нашли?» (К 10 прибавили 2, получилось 12.)

Для того чтобы вычислительный процесс предстал перед учащимися ясно и отчётливо, нужно записать на классной доске все этапы вычислений. Получится такая запись:

$$7 + 5 = ?$$
$$7 + 3 = 10$$
$$10 + 2 = 12$$

Решив на наглядных пособиях 3 примера, нужно сделать обобщение: «Как же мы к 8 прибавляли 7? к 7 прибавляли 5?» Сначала прибавляли к первому числу столько, чтобы получилось 10, а потом к 10 прибавляли остальное».

Для успеха в работе надо, чтобы ученики быстро умели дополнять любое однозначное число до 10. Это достигается специальными упражнениями, которые играют роль подготовительных упражнений к сложению с переходом через десяток.

«Сколько надо прибавить к 6, чтобы получилось 10? К какому числу надо прибавить 2, чтобы получилось 10?» и т. д.

Упражнения в изучении сложения с переходом через десяток можно вести в том порядке, в каком расположена таблица сложения (см. стр. 173).

В ы ч и т а н и е. Вычислительный приём вычитания поясняется на тех же наглядных пособиях, что и сложение. Первым для объяснения можно взять пример 15 — 7. На классных счётах или на счётной таблице откладывается на верхней проволоке 10 шариков, на нижней 5. От 15 надо отнять 7. Сбрасывается сначала 5 шариков, которые находятся на нижней проволоке. Остаётся отнять ещё 2 шарика с верхней проволоки. После объяснения трёх примеров делается обобщение.

Те примеры, в которых второе слагаемое больше первого, выполняются путём перестановки слагаемых. Так, если дано к 3 при-

бавить 8, то вместо прибавления 8 к 3 можно прибавить 3 к 8. Равенство $3+8=8+3$ поясняется на классных счётах и на счётной таблице.

Упражнения в запоминании таблицы сложения и вычитания наизусть.

Для усвоения таблицы нужно, изучая новые части таблицы, всё время повторять пройденное. По мере изучения таблицы отдельные её части вывешиваются на стену в классе; эти таблицы читаются учащимися хором и в одиночку.

Для лучшего запоминания таблицы группы примеров подбираются для решения так, чтобы была видна связь между сложением и вычитанием, например:

$7+6=13$	$9+7=16$
$6+7=13$	$7+9=16$
$13-6=7$	$16-9=7$
$13-7=6$	$16-7=9$

Отдельно выделяются примеры на сложение равных слагаемых. Они легче запоминаются и могут служить в качестве опорных для других примеров со смежными числами:

$$6+6=12;\ 7+7=14;\ 8+8=16;\ 9+9=18.$$

Если ученик знает, что 6 да 6 будет 12, то ему нетрудно сказать, сколько будет 6 да 7; очевидно, что сумма этих чисел будет на единицу больше, чем 12, т. е. 13. Если учащийся помнит, что 8 да 8 будет 16, то ему нетрудно запомнить сумму 8 и 9; очевидно, она будет на единицу больше суммы 8 и 8, т. е. 17.

Для запоминания сложения и вычитания применяются игры в лото, в занимательные квадраты, в молчанку и др.

Одновременно повторяется сложение и вычитание без перехода через десяток; для усвоения вычислительных приёмов также подбираются специальные группы примеров, построенные на взаимосвязи сложения и вычитания.

$16+4=20$	$15+3=18$
$4+16=20$	$3+15=18$
$20-16=4$	$18-3=15$
$20-4=16$	$18-15=3$

Хорошим упражнением является решение примеров с вопросительным знаком, причём здесь решаются такие примеры не только на сложение, но и на вычитание:

$6+?=10$	$10-?=2$
$?+7=10$	$19-?=10$

Они являются хорошим подготовительным упражнением к сложению и вычитанию с переходом через десяток.

Аналогичные примеры решаются и для уяснения состава чисел второго десятка: $8+?=11$; $?-6=13$; $14-?=6$; $?-9=7$.

Решая их, учащиеся не прибегают к выбору действий, при помощи которых определяется неизвестное,— это неизвестное они находят на основе знания состава чисел.

Решение задач на сложение и вычитание является одним из лучших средств для упражнения в этих действиях. При изучении этого раздела начинается решение задач *в два действия* (см. стр. 75—80). Кроме того, учащиеся знакомятся здесь с новым видом задач — с задачами на увеличение и уменьшение данного числа на несколько единиц. Для этого предварительно выясняется на наглядных пособиях понятие «больше на столько-то единиц» и «меньше на столько-то единиц».

Увеличение числа на несколько единиц.

До сих пор учащиеся воспринимали сложение как действие, посредством которого находится только сумма двух или нескольких слагаемых; они решали на сложение такие задачи, в которых спрашивалось: «Сколько всего...». Вычитание воспринималось детьми как действие, посредством которого находится остаток; в задачах на вычитание ставился только такой вопрос: «Сколько осталось?» Теперь расширяется понимание этих действий,— им придаётся новый смысл. Выясняется тот случай *сложения*, когда приходится число *увеличивать* на несколько единиц, и тот случай *вычитания*, когда приходится число *уменьшать* на несколько единиц. Выясняется математическое значение фразы «больше на столько-то единиц» и «меньше на столько-то единиц». Это выяснение происходит следующим образом.

Учитель откладывает на верхней и нижней проволоках классных счётов по 4 шарика.

«Сколько шариков отложено на верхней проволоке?» (Четыре.)

«Сколько шариков отложено на нижней проволоке?» (Тоже четыре.)

«Что можно сказать про шарики на верхней и нижней проволоках?» (На верхней и нижней проволоках отложено шариков *поровну*. Или: на верхней проволоке отложено шариков *столько же*, *сколько* на нижней.)

В случае затруднений со стороны учащихся, учитель может сам сформулировать этот ответ.

«У Володи 5 карандашей и у Миши столько же карандашей, сколько у Володи. Сколько карандашей у Миши? В одном ящике 4 кубика и в другом *столько же*. Сколько кубиков в двух ящиках? Отложите у себя справа 3 палочки. Отложите слева столько же».

Возвращаясь к классным счётам, учитель откладывает на верхней проволоке ещё 2 шарика.

«А теперь скажите, *поровну* ли отложено шариков на обеих проволоках?» (Нет, не поровну.) «На какой проволоке больше?» (На верхней.)

«Сколько же *лишних* шариков положено на верхней проволоке?» (Лишних два шарика.)

Вместо «лишних два шарика» говорят: «*Больше на два шарика*». «На верхней проволоке лишних два шарика. Как сказать это иначе?» (*На верхней проволоке больше на 2 шарика*.) Ответ повторяется в одиночку и хором. «Отложим на верхней проволоке 4 шарика. А на нижней столько же и ещё 3 шарика. Сколько всего шариков отложено на нижней проволоке? Как мы это узнали?» (К четырём прибавили 3, получилось 7.)

«Сколько лишних шариков на нижней проволоке? Как иначе можно это

сказать?» (На нижней проволоке на 3 шарика больше) «Отложите у себя справа 5 палочек, а слева на 2 палочки больше. Как будете откладывать палочки слева?» (Отложим столько же, сколько справа, и ещё две палочки.) «Сколько всего палочек получилось?» (7.)

«Как получилось 7? Что вы сделали?» (К 5 палочкам прибавили 2 палочки, получилось 7 палочек.)

«Я нарисовал на доске 6 кружочков. Теперь я хочу во втором ряду нарисовать кружочков на 3 больше. Как это сделать?» (Нарисовать 6 кружочков и ещё 3 кружочка.)

«Сколько всего кружочков получится во втором ряду?» (9.)

«Что нужно сделать, чтобы получить 9?» (К 6 прибавить 3.)

«Я поставил на планку 5 кубиков. А ты, N, поставь на 4 кубика больше. Что значит на 4 кубика больше? Как это сделать?»

«В одной комнате 8 стульев, а в другой на 2 стула больше. Что это значит — на 2 стула больше?» (Это значит 8 стульев и ещё 2 стула.) «Сколько же стульев в другой комнате? Как это узнать?» (К 8 прибавить 2, будет 10.) Запишем это: $8+2=10$.

«Карандаш стоит 6 коп., а ручка на 2 копейки дороже. Сколько стоит ручка? Повторите эту задачу. Что значит — на 2 коп. дороже?» (Ручка стоит на 2 коп. больше.) «Сколько же стоит ручка? Как это узнать?» (К 6 прибавить 2, будет 8). Запишем это: $6+2=8$.

«Было 8 стульев, стало на 2 стула больше. Иначе можно сказать: число стульев увеличилось на 2. Так сколько было стульев? (Было 8 стульев.) На сколько больше стало стульев? (На 2 стула больше.) На сколько увеличилось число стульев? (Число стульев увеличилось на 2.) Как же увеличить 8 на 2? (К 8 надо прибавить 2.)»

«Увеличьте 7 на 3. Сколько будет? Как вы это сделали? Запишите это ($7+3=10$). Увеличьте 5 на 5; 4 на 3; 2 на 8» и т. д.

Уменьшение числа на несколько единиц.

Учитель кладёт на двух проволоках классных счётов по 6 шариков.

«Сколько шариков положено на верхней проволоке? Сколько на нижней? Что можно сказать про шарики на верхней и нижней проволоках?» (На обеих проволоках шариков поровну. Или: на верхней проволоке столько шариков, сколько и на нижней.)

Учитель сбрасывает с нижней проволоки 2 шарика.

«Поровну ли теперь положено шариков на обеих проволоках? На которой меньше? Сколько шариков нехватает теперь на нижней проволоке?» (Нехватает двух шариков.) Это можно сказать по-другому: на нижней проволоке меньше на 2 шарика. «Вместо «нехватает двух шариков» будем говорить меньше на 2 шарика. Нехватает четырёх кубиков. Как это сказать иначе? Я нарисовал 6 палочек. Теперь я хочу, чтобы тут стало на 3 палочки меньше. Как это сделать?» (Надо стереть 3 палочки.)

«На планке стоит 12 кубиков. Сделайте, чтобы здесь стало двумя кубиками меньше. Как это сделать?» (2 кубика снять или отнять.)

«Отложите у себя на парте слева 10 палочек, а справа на 3 палочки меньше. Отложите теперь справа 9 палочек, а слева на 4 палочки меньше. Нарисуйте в тетради на одной строчке 7 крестиков, а на второй строчке меньше на один крестик».

«Наш коридор имеет в длину 11 метров, а класс короче коридора на 4 метра. Какой длины наш класс? Что значит «короче на 4 метра?» (Меньше на четыре метра.) «Что же надо сделать, чтобы узнать длину класса?» (От 11 *м* отнять 4 *м*, получится 7 *м*.) Запишите это ($11-4=7$).

«От 7 отнимите 2, сколько будет? Что меньше — 5 или 7? Значит, когда мы от 7 отняли 5, то мы уменьшили число 7. Что же мы сделали с числом 7? Сколько отняли мы от 7? На сколько уменьшили мы число 7? Как мы уменьшили 7 на 2? (От 7 отняли 2.) Запишите это ($7-2=5$).

Уменьшите 5 на 3. Сколько будет? Как вы это сделали? Уменьшите 15 на 4; 11 на 2; 20 на 5; 15 на 10» и т. д.

Обобщение. Если какое-либо число надо уменьшить на 5, надо от данного числа отнять 5. А если данное число надо увеличить на 5, надо к нему прибавить 5.

Дальше следует решение задач на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц.

Примерное содержание контрольных работ на сложение и вычитание в пределе 20.

а) на сложение и вычитание без перехода через десяток:

1) 10 + 6 =	5) 18 − 5 =	9) 2 + 14 =
2) 18 − 8 =	6) 20 − 7 =	10) 20 − 15 =
3) 12 + 6 =	7) 5 + 13 =	11) 18 − 12 =
4) 16 + 4 =	8) 17 − 6 =	12) 11 + 3 =

б) на сложение и вычитание с переходом через десяток:

1) 8 + 6 =	6) 11 − 6 =	11) 8 + 9 =
2) 15 − 9 =	7) 8 + 8 =	12) 13 − 5 =
3) 7 + 5 =	8) 18 − 9 =	13) 7 + 6 =
4) 14 − 7 =	9) 12 − 4 =	14) 12 − 9 =
5) 9 + 4 =	10) 3 + 9 =	15) 9 + 7 =

УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ.

Умножение и деление можно проходить совместно или раздельно, т. е. сначала умножение, а потом деление. Система раздельного изучения этих действий является более целесообразной.

При раздельном изучении умножения и деления внимание учащихся на определённом отрезке времени сосредоточивается только на одном действии; круг изучаемых вопросов становится уже, что даёт учащемуся возможность вникать в них глубже. Получается возможность сильнее подчёркивать связь умножения со сложением, вычитания с делением. Связь же умножения с делением будет установлена и использована при последующем изучении деления.

Однообразие в работе можно ослабить введением повторения пройденного, т. е. сложения и вычитания.

УМНОЖЕНИЕ В ПРЕДЕЛЕ 20.

В пределе второго десятка сложение равных слагаемых рассматривается как новое действие умножения со своим знаком и особой терминологией. Здесь даётся первоначальное понятие об этом действии, выясняется его конкретный смысл. Даются конкретные образы, поясняющие смысл умножения. Учащиеся фактически берут по нескольку раз определённые группы предметов (например, 3 раза по 4 кубика, 2 раза по 6 палочек и т. д.).

В соответствии с этим термин «умножить на столько-то» заменяется на этой ступени обучения более понятным для детей и образным термином «взять по столько-то». Запись умножения

$4 \times 5 = 20$ дети в I классе читают так: «По 4 взять 5 раз, получится 20».

Основным вычислительным приёмом умножения в пределе 20 является приём *набора* равных слагаемых. Здесь возможны сокращённые приёмы набора равных слагаемых.

Например, восемь двоек можно набрать так: пять двоек — 10 и три двойки — 6, а всего 16. Эти приёмы демонстрируются на наглядных пособиях.

Переместительное свойство умножения не так просто и очевидно, как переместительное свойство сложения. Поэтому при нахождении произведения в пределе 20 не следует опираться на перемещение сомножителей. Примеры 3×4 и 4×3 рассматриваются здесь как самостоятельные и независимые друг от друга примеры; в первом случае дети должны уметь набрать 4 тройки, а во втором — 3 четвёрки, чтобы получить одно и то же произведение 12.

Таблица умножения, усваиваемая наизусть, может быть построена двумя способами: 1) по постоянному *множимому* и 2) по постоянному *множителю*. Если мы хотим построить таблицу умножения по постоянному *множимому*, то мы должны взять числа натурального ряда одно за другим и умножить каждое из них на все числа первого десятка. Получится следующая таблица:

1 × 1	2 × 1	3 × 1	5 × 1
1 × 2	2 × 2	3 × 2	5 × 2
1 × 3	2 × 3	3 × 3	5 × 3
1 × 4	2 × 4	3 × 4	5 × 4
1 × 5	2 × 5	3 × 5	6 × 2
1 × 6	2 × 6	3 × 6	6 × 3
1 × 7	2 × 7	4 × 2	7 × 2
1 × 8	2 × 8	4 × 3	8 × 2
1 × 9	2 × 9	4 × 4	9 × 2
1 × 10	2 × 10	4 × 5	10 × 2

Здесь множимое остаётся постоянным, множитель, наоборот, является переменной величиной. Сначала *число* 2 умножается на все числа первого десятка, потом 3, затем 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Но в этой таблице числа можно перегруппировать и построить её так, что *множимое будет переменным*, а *множитель постоянным*. Тогда таблица умножения в пределе 20 будет иметь следующий вид:

1 × 2	1 × 3	1 × 5
2 × 2	2 × 3	2 × 5
3 × 2	3 × 3	3 × 5
4 × 2	4 × 3	4 × 5
5 × 2	5 × 3	2 × 6
6 × 2	6 × 3	3 × 6
7 × 2	2 × 4	2 × 7
8 × 2	3 × 4	2 × 8
9 × 2	4 × 4	2 × 9
10 × 2	5 × 4	2 × 10

Очевидно, что эти различные варианты таблицы могут получиться в результате различных систем изучения умножения. Какая же система работы является более целесообразной?

Когда таблица строится по постоянному множимому, то между каждыми двумя её смежными строчками существует тесная связь: каждый последующий её случай опирается на предыдущий, является его естественным продолжением.

$4 \times 1 =$
$4 \times 2 =$
$4 \times 3 =$
$4 \times 4 =$
$4 \times 5 =$

Возьмём, например, часть таблицы — умножение 4. Составляя эту часть таблицы, учащиеся сначала возьмут 2 раза по 4 и получат 8. Дальше, когда учащиеся перейдут к набиранию трёх четвёрок (4×3), то им не нужно начинать процесс набирания четвёрок с самого начала. Чтобы составить сумму из трёх четвёрок, достаточно к восьми прибавить третью четвёрку, получится 12. Чтобы набрать 4 четвёрки, можно воспользоваться тем, что произведение 4×2 нам известно: сложив два таких произведения, получим искомое произведение.

Всё это облегчает процесс набора слагаемых, их группировку и делает приёмы вычисления экономными.

Теперь рассмотрим *второй способ* построения таблицы (по постоянному множителю).

Возьмём часть таблицы — умножение на 4:

1×4
2×4
3×4
4×4
5×4

Набираем 4 двойки, получается 8. Дальше надо набрать 4 тройки. Набор надо начинать сначала, так как этот случай новый и никакого отношения к предыдущему не имеет. Чтобы умножить 4 на 4, опять надо начинать заново, и т. д.

Таким образом, при этом способе между предыдущим и последующим случаем умножения нет ничего общего. Добавим ещё, что при этом способе выгода замены сложения умножением малоубедительна для учащихся. Когда составляется таблица по первому способу, легко показать всю целесообразность перехода от сложения к умножению.

В самом деле, $2 + 2 + 2$ лучше заменить записью 2×3.
Выражение $2 + 2 + 2 + 2$ лучше заменить записью 2×4.
Выражение $2 + 2 + 2 + 2 + 2$ лучше заменить записью 2×5 и т. д.

Это же трудно показать в таблице, составляемой по второму способу, где сначала все числа первого десятка умножаются только на 2.

Учитывая всё сказанное, мы должны прийти к тому выводу, что *расположение элементов таблицы по постоянному множимому выгоднее, целесообразнее.*

Но пройдя таблицу по постоянному множимому, нужно перегруппировать её элементы, расположить их по постоянному множителю и в данном виде повторить и усвоить её наизусть. В таком виде она легче, удобнее для запоминания.

Наглядными пособиями при изучении таблицы умножения в пределе 20 служат классные счёты, кубики и печатная иллюстрированная настенная таблица умножения до 20 (автор таблицы Г. Б. Поляк).

Усвоение смысла и записи умножения.

Учитель предлагает детям положить на парту дидактический материал (кубики, палочки, кружочки и др.), а сам, обращаясь к классным счётам, откладывает на них 2 шарика.

«Сколько шариков отложено на счётах?» (2 шарика.) «Отложите вы у себя две палочки. Отложим ещё 2 шарика (учитель рядом с первой парой откладывает ещё вторую пару шариков). А вы у себя отложите ещё 2 палочки, не сдвигая их. Сколько всего палочек получилось?» (4.) «Как вы узнали?» (К двум прибавили 2.) «Запишем это на доске (появляется запись: $2+2=4$). Отложим на счётах ещё пару шариков, а вы у себя отложите третью пару палочек. Сколько получилось всего шариков (палочек)? Как вы узнали это?» (К двум прибавили 2 и ещё 2. Получилось 6.)

«Запишем это: $2+2+2=6$. Отложим на счётах ещё одну пару шариков, а вы у себя возьмите ещё одну пару палочек. Сколько всего шариков (палочек) получилось? Посчитаем: 2 да $2=4$, 4 да ещё $2=6$, 6 да ещё $2=8$. Сколько раз мы брали по 2 шарика, по 2 палочки? Сколько получилось? Отложим на счётах ещё одну — пятую — пару шариков, а вы у себя отложите пятую пару палочек; сколько всего шариков (палочек) отложено? Посчитаем: 2 да $2=4$, 4 да $2=6$, 6 да $2=8$, 8 да $2=10$. Запишем это: $2+2+2+2+2=10$. По скольку шариков (палочек) мы брали каждый раз?» (По 2.) «Сколько раз мы брали по 2 шарика (по 2 палочки)?» (5 раз.) «Сколько всего шариков (палочек) получилось?» (10.)

На доске получилась следующая запись:

1) $2+2=4$
2) $2+2+2=6$
3) $2+2+2+2=8$
4) $2+2+2+2+2=10$

Далее учитель откладывает на планку классной доски 5 раз по 2 кубика, говоря:

«Теперь я возьму 5 раз по 2 кубика. Сколько кубиков получилось? Посчитаем: 2 да $2=4$» и т. д.

«По скольку кубиков я брал?» (По 2.) «Сколько раз я брал по 2 кубика?» (5 раз.) «Сколько кубиков получилось?» (10 кубиков.) «Как мы узнали, сколько получилось?» (Считали двойками: два да два — четыре, да ещё два — шесть, да ещё два — восемь, да ещё два — десять).

«Повторим полным ответом, что мы делали: мы *брали 5 раз по 2 кубика, получилось 10 кубиков*; *мы брали 5 раз по 2 палочки, получилось 10 палочек*. Вместо того чтобы говорить «к двум прибавить два, прибавить ещё два, прибавить ещё два и прибавить ещё два» говорят короче и скорее: *по два взять пять раз*.

Прочитаем нашу запись, начиная с конца — с четвёртой строчки».

Ученики читают: «К двум прибавить два, прибавить ещё два» и т. д. «Как короче можно прочитать эту запись?» (По 2 взять 5 раз, получится 10.)

«Прочитайте третью строчку: «К двум прибавить два» и т. д. Прочитайте короче эту запись: по 2 взять 4 раза, получится 8. Прочитайте коротко вторую строчку! Первую строчку! Когда прибавляют поровну, то вместо того, чтобы повторять много раз слово «прибавить», как говорят короче?» (Взять столько-то раз.) «Когда прибавляют поровну, то *записывают* сложение короче. Заменим наши длинные записи более короткими. Что записано в 4-й строчке?» (По 2 взять 5 раз, получится 10.) «Смотрите, как это пишут».

Учитель говорит медленно, раздельно и пишет (против записи сложения пяти двоек):

$$2\times5=10.$$

поясняя: «Вместо слова «взять» ставят косой крестик, вместо слов «пять раз» пишут 5, вместо слова «получится» пишут две чёрточки. Прочитаем, что записано (читают хором). Что означает косой крестик? Вместо слова «взять» какой знак пишут? Сделайте у себя в тетрадях сначала длинную запись, потом короткую».

Ученики записывают:

$$2+2+2+2+2=10;\ 2\times5=10.$$

«Прочитайте, что вы записали. Прочитаем теперь третью строчку. Запишем её короче».

Появляется на доске запись: $2\times4=8$.

«Сделайте у себя сначала длинную запись, потом короткую».

Ученики записывают:

$$2+2+2+2=8;\ 2\times4=8.$$

То же проделывается со второй и первой строчками.

Далее следуют упражнения, направленные на углубление понимания смысла умножения и его записи.

Учитель пишет на доске: 2×3.

«Прочитайте, что я написал». (По 2 взять 3 раза.)

«Покажите это на палочках (кубиках). Запишите это в своих тетрадях и вычислите (ученики пишут $2\times3=6$). Как вы узнали, что по 2 взять 3 раза будет 6?» (К двум прибавили 2 — стало 4; к четырём прибавили 2 — стало 6.) «Будем считать по 2, или двойками, до 10». (Два, четыре, шесть, восемь, десять.) «Отсчитывайте по двойке, начиная с 10». (Десять, восемь, шесть, четыре, два.) «Запишите счёт двойками в тетради».

Ученики пишут: 2, 4, 6, 8, 10; 10, 8, 6, 4, 2.

После того как дети уяснят смысл умножения на числах первого десятка, надо перейти к умножению 2 на 6, 7, 8, 9, 10. Умножение на эти числа опирается на счёт двойками до 10. Знание таблицы умножения двух в пределе 10 позволяет при дальнейшем умножении применять сокращённый приём набора равных слагаемых.

«Так, чтобы набрать 6 двоек, надо взять 5 двоек и прибавить одну двойку. 5 двоек — это 10; 10 да 2 = 12. Значит, 6 двоек будет 12. Чтобы набрать 8 двоек, достаточно взять 5 двоек и 3 двойки. 5 двоек — это 10; 3 двойки — это 6, а 10 да 6 = 16. Значит, 8 двоек, составят 16 и т. д. Беря по два 6, 7, 8, 9, 10 раз, дети рассуждают так: чтобы по 2 взять 7 раз, возьмём 5 раз по два, получим десяток, затем возьмём ещё 2 раза по 2, получим 4, а всего получится 14».

В качестве самостоятельной работы детям даются упражнения на замену сложения умножением и, наоборот, умножения сложением. («Замените длинную запись короткой. Замените короткую запись длинной».)

1) $2+2+2+2+2+2+2=14;\ \ 2\times7=14$
2) $2+2+2+2+2+2+2+2+2=18;\ \ 2\times9=18$
3) $2\times8=16;\ \ 2+2+2+2+2+2+2+2=16$
4) $2\times6=12;\ \ 2+2+2+2+2+2=12.$

Заканчивается изучение таблицы умножения по 2 решением задач на умножение. Первые задачи надо предлагать в такой форме, чтобы из содержания задачи вытекала необходимость повторять данное число несколько раз, например:

«Девушка ходила за водой 3 раза и каждый раз приносила по 2 ведра. Сколько всего вёдер воды она принесла?»

«Ученик покупал тетради 5 раз, каждый раз по 2 тетради. Сколько тетрадей купил ученик?»

«Дети для игры построились в 8 рядов, в каждом ряду по 2 человека. Сколько детей построилось для игры?»

После таких задач предлагаются задачи, в которых необходимо данное число повторить слагаемым несколько раз, например: «Мальчик купил 8 перьев, по 2 копейки за перо. Сколько копеек мальчик уплатил за перья?»

Задачи решаются устно, но часть решённых задач записывается. При записи нужно строго различать места множимого и множителя (на первом месте стоит множимое, на втором множитель). Решение вышеуказанной задачи записывается так: 2 коп. $\times$ 8=16 коп. При множимом и произведении нужно ставить наименования. Множитель же как число отвлечённое, показывающее, сколько раз множимое повторяется слагаемым, пишется всегда без наименования.

Умножение по 3. Умножение по 3 начинается со счёта тройками на наглядных пособиях (классные счёты, кубики, палочки и др.). Учитель составляет столбики из трёх кубиков и предлагает детям считать их.

«На планке 3 кубика. Прибавим ещё столбик в 3 кубика. Сколько кубиков получилось?» (3 да 3 = 6.) «Прибавим ещё третий столбик в 3 кубика. Считайте, сколько всего кубиков получилось?» (3 да 3 = 6, 6 да 3 = 9.) «Прибавим ещё четвёртый столбик в 3 кубика. Сколько теперь кубиков стало?» (9 да 3 = 12.) «Прибавим пятый столбик в 3 кубика. Сколько всего кубиков получилось?» (12 да 3 = 15.) «И наконец, прибавим шестой столбик из трёх кубиков. Сколько теперь кубиков получилось?» (15 да 3 = 18.)

Показывая на два столбика, учитель спрашивает: «По 3 кубика взять 2 раза — сколько получится кубиков?» (По 3 кубика взять 2 раза, получится 6 кубиков.)

Указывая на 3 столбика, учитель спрашивает: «По 3 кубика взять 3 раза, сколько получится кубиков?» (По 3 кубика взять 3 раза — будет 9 кубиков и т. д.) «По 3 кубика взять 6 раз. Сколько кубиков получится? Достаньте свои палочки. Будем считать их тройками».

Ученики откладывают по 3 палочки и считают: «3 да 3 — будет 6 палочек; 6 да ещё 3 — будет 9 палочек; 9 да 3 — будет 12 палочек» и т. д.

Далее производится прямой и обратный счёт тройками без наглядных пособий, на отвлечённых числах:

Три, шесть, девять, двенадцать, пятнадцать, восемнадцать. Восемнадцать, пятнадцать, двенадцать, девять, шесть, три.

«Запишите в тетрадях числа, которые получаются при счёте тройками:

3, 6, 9, 12, 15, 18. 18, 15, 12, 9, 6, 3.

Запишем прибавление по 3 кубика сначала длинной записью, потом короткой:

$3+3=6$	$3\times2=6$
$3+3+3=9$	$3\times3=9$
$3+3+3+3=12$	$3\times4=12$
$3+3+3+3+3=15$	$3\times5=15$
$3+3+3+3+3+3=18$	$3\times6=18$

Так получается таблица умножения по 3, которая читается учащимися несколько раз хором и в одиночку.

Работа завершается письменным решением примеров и задач. Таблица даётся на дом для усвоения наизусть.

Умножение по 4 и по 5 производится по тому же плану: а) счёт четвёрками, пятёрками на наглядных пособиях; счёт четвёрками, пятёрками на отвлечённых числах с записью результатов счёта; в) запись прибавления по четыре, по пяти (в виде сложения); г) запись счёта четвёрками и пятёрками (в виде умножения); д) решение примеров и задач на таблицу умножения по 4 и по 5; е) упражнения в заучивании таблиц в классе и дома.

Из таблиц умножения по шести, семи, восьми и девяти рассматриваются в пределе 20 только по 1—2 случая:

$$6 \times 2 \qquad 7 \times 2 \qquad 9 \times 2$$
$$6 \times 3 \qquad 8 \times 2 \qquad 10 \times 2$$

Повторение таблицы умножения, расположенной по постоянному множителю, на 2, на 3, на 4, на 5.

Когда таблица умножения по постоянному множимому будет усвоена, нужно перегруппировать элементы таблицы, расположить её по постоянному множителю и снова повторить. Сначала нужно повторить умножение всех чисел первого десятка на 2, потом на 3, затем на 4 и наконец на 5. К этому времени конкретный смысл умножения для детей должен быть ясен. Теперь уже можно ввести в терминологию некоторые условности, которые сближают математическую речь учащихся с установившимся общепринятым языком в арифметике и помогают усвоению таблицы умножения наизусть. Речь идёт о допущении терминов «умножить», «умножение». «Будем решать примеры на умножение». «Запишите пример: «3 умножить на 5». Такими фразами нужно пользоваться наряду с фразами: «По 3 взять 5 раз» и «3 повторить 5 раз».

Повторение начинается с того, что учитель пишет на доске таблицу умножения на 2:

$$2 \times 2 = 4 \qquad 5 \times 2 = 10 \qquad 8 \times 2 = 16$$
$$3 \times 2 = 6 \qquad 6 \times 2 = 12 \qquad 9 \times 2 = 18$$
$$4 \times 2 = 8 \qquad 7 \times 2 = 14 \qquad 10 \times 2 = 20$$

Ученики читают эту таблицу: «По 2 взять 2 раза, будет 4; по 3 взять 2 раза, будет 6; 4 повторить 2 раза, будет 8; 5 умножить на 2, получится 10» и т. д.

Так читается сначала раза два вся таблица подряд, а затем вразбивку, после чего учитель даёт задание списать эту таблицу и усвоить её наизусть.

В таком плане повторяется таблица умножения на 3, 4 и 5. На этом заканчивается изучение части таблицы умножения, заключённой в пределе 20. На каждом из повторительных уроков ре-

шаются задачи в одно и два действия, в которых наряду с умножением фигурируют и другие действия — сложение или вычитание, например:

«Мальчик купил 4 пера по 3 коп. за перо и дал в уплату 20 копеек. Сколько сдачи должен получить мальчик?»

«В двух маленьких коробках лежит по 5 карандашей, а в одной большой на 6 карандашей больше. Сколько карандашей лежит в большой коробке?»

Около половины задач решается с записью решения. Цель записи — научить учащихся не только выбрать действие для решения вопроса, но и записать его и притом правильно поставить наименование, на должном месте поставить множимое и множитель. Запись должна быть такой:

1-я задача.

1) 3 коп. $\times$ 4 = 12 коп.;
2) 20 коп. — 12 коп. = 8 коп.

2-я задача.

1) 5 кар. $\times$ 2 = 10 кар.;
2) 10 кар. + 6 кар. = 16 кар.

При изучении умножения и в особенности в процессе его повторения решаются смешанные примеры на сложение, вычитание и умножение. При этом в некоторые примеры вводятся скобки, например:

$$(11 - 8) \times 3$$

Без скобок этот пример был бы невозможен для решения. Но в примерах типа $5 \times 2 + 5$ скобки излишни.

ДЕЛЕНИЕ В ПРЕДЕЛЕ 20.

На первых ступенях обучения необходимо различать два вида деления: деление на равные части, когда по произведению и множителю надо найти множимое, и деление по содержанию, когда по произведению и множимому надо найти множитель. Этим двум видам деления соответствуют разные задачи.

Возьмём задачу: «За 2 одинаковых карандаша заплатили 16 копеек. Сколько стоит один карандаш?» Чтобы решить эту задачу, нужно 16 разделить на две равные части. В этой задаче мы имеем дело с делением на равные части.

Возьмём другую задачу: «Один карандаш стоит 8 коп. Сколько карандашей можно купить на 16 коп.?» Эта задача решается тоже делением. Но здесь деление имеет другой смысл: деля 16 на 8, мы узнаем, сколько раз 8 содержится в 16. Деление вытекает здесь из следующего рассуждения: если один карандаш стоит 8 коп., то на 16 коп. можно купить столько карандашей, сколько раз 8 коп. содержится в 16 коп. Сколько же раз 8 содержится в 16? Этот вопрос решается делением.

Этим двум задачам на деление соответствуют разные образы, различные схемы рассуждения. Ученик должен хорошо овладеть каждым видом деления в отдельности, чтобы потом у него сформировалось единое понятие деления.

При разрешении вопроса, в какой последовательности знакомить учащихся с этими видами деления, нужно учесть следующее. Деление на равные части знакомо ребёнку из его жизненного дошкольного опыта; деление по содержанию ребёнку незнакомо. Дидактика же требует, чтобы при обучении всегда исходили от известного, знакомого.

Деление на равные части понятнее для ребёнка; смысл деления по содержанию труднее воспринимается детьми.

Запись деления на равные части проста и понятна ребёнку; запись деления по содержанию сложна и трудна для детей; правильной записи деления по содержанию с её условностями приходится учить много и долго. Сравним записи решения двух вышеприведённых задач:

1) 16 коп. : 2 = 8 коп.
2) 16 коп. : 8 коп. = 2 (кар.).

Из обозрения этих записей видно, что вторая запись сложнее первой.

Способ деления на равные части доступен пониманию ребёнка; он довольно просто иллюстрируется на наглядных пособиях. Усвоению результатов деления помогает знание таблицы умножения. Если ребёнок знает, что $5\times2=10$, то для него нетрудно 10 разделить на 2, поставив вопрос: «По скольку надо взять 2 раза, чтобы получить 10?»

Таким образом, целесообразнее начинать изучение деления с деления на равные части; первоначальное же ознакомление с делением по содержанию нужно давать значительно позже.

Деление на равные части.

Основной приём деления на равные части состоит в том, что из группы предметов, которые надо разделить, берётся количество предметов, равное числу частей, чтобы при делении в каждой части получилось по одному предмету, по единице. Затем из оставшейся группы предметов снова берётся столько предметов, чтобы при делении на данное число частей в каждой части получилось ещё по одному предмету, по второй единице. Так поступают до тех пор, пока не будут исчерпаны все предметы данной группы.

Для нахождения результата деления используется связь деления с умножением. Чтобы быстро и безошибочно найти результаты деления, нужно исходить из таблицы умножения.

В самом деле, если ученик знает, что $5\times3=15$, то он без особого труда может найти результат деления 15 на 3. «Какое число надо повторить 3 раза, чтобы получить 15?» — такой вопрос ставит перед собой ученик и на основании знания таблицы умножения отвечает: «Пять». Значит, если разделить 15 на 3 равные части, получится в каждой части по 5.

Если 10 разделить на 5 равных частей, то в каждой части получится по 2, так как по 2 взять 5 раз будет 10.

Учащиеся усваивают сначала результаты деления чисел первого десятка, а в дальнейшем, при переходе к делению чисел второго десятка, используют эти знания для более скорого нахождения частного.

Например, если нужно разделить 16 на 2 равные части, то можно сначала разделить 10 на 2, получается 5, затем 6 разделить на 2, получается 3. А всего в результате получится 8 $(5+3)$. Если нужно 18 разделить на 3 равные части, то ученик может 9 разделить на 3, потом ещё раз 9 разделить на 3. Получится в результате 6 (3 на 3).

Язык учащихся при изучении деления на первых порах должен быть свободен от тех условностей, которые приняты в установленной для деления терминологии. Пример $18:2=9$ обычно читается так: «Восемнадцать разделить на два, получится девять». В этой фразе много условного: во-первых, в словах «разделить на 2» обобщены два вида деления; на этой же стадии изучения деления учащиеся знакомятся только с делением на равные части; во-вторых, условна фраза: «получится девять», в действительности при делении на две части получается в каждой части по девяти. Освобождая учащихся от этих условностей, которые будут введены позже, нужно требовать, чтобы они на первых порах пример $18:2=9$ читали так: «Восемнадцать разделить на две равные части, получится по девяти».

Порядок изучения деления в пределе 20:

1) Выяснение смысла деления на равные части на наглядных пособиях; демонстрируется деление 2, 4, 6, 8, 10 на 2.

2) Деление 3, 6, 9 на 3.

3) Деление 4, 8 на 4 и 10 на 5.

4) Деление чисел второго десятка: 12, 14, 16, 18, 20 на 2; деление 12, 15, 18 на 3; деление 12, 16, 20 на 4; деление 10, 15, 20 на 5.

Изучение деления, как и других действий, сопровождается решением возможно большего количества задач.

Первые шаги в изучении деления.

Учитель даёт ученику 2 карандаша и предлагает ему раздать эти карандаши поровну двум ученикам. По скольку карандашей должен получить каждый ученик?

Ученик раздаёт и, отвечая на вопрос, говорит: «По одному карандашу». На счётах откладываются 2 шарика.

«Разделим 2 шарика на две равные части. По скольку шариков получится в каждой части?» (Шарики раздвигаются.)

(Два шарика разделить на две равные части — в каждой части будет по одному шарику.)

«Отложите у себя две палочки. Разделите их на две равные части. По скольку палочек в каждой части? Два ореха разделить между двумя мальчиками — сколько орехов достанется каждому? Два разделить пополам — сколько будет? Половина двух — это сколько? Верёвку длиной в 2 *м* разрезали пополам. Сколько метров в каждой части?» (По 1 метру.) «Как вы узнали?» (Два разделить пополам — будет один.)

Далее на стол кладётся 4 карандаша. Вызвав к столу одного ученика, учитель предлагает ему разделить их поровну между двумя учениками. Для раздачи ученик берёт 2 карандаша и раздаёт их по одному карандашу, говоря: «Беру 2 карандаша и делю их на две равные части, получается по одному. Беру ещё 2 карандаша и делю их на две равные части, получается ещё по одному. А всего один да один — будет два».

На этом упражнении дети усваивают приём деления на равные части, который они применяют потом к делению пополам шести, восьми, десяти.

На стол ставятся 6 кубиков.

«Сколько кубиков поставлено? Как разделить их на 2 равные части? Взять 2 кубика и разделить их на 2 равные части, получается в каждой части по одному кубику. Потом взять ещё 2 кубика и разделить их на 2 равные части, получится ещё по одному кубику. Дальше взять последние 2 кубика и их разделить на две равные части; придётся ещё по одному кубику. Значит, если 6 кубиков разделить на 2 равные части, то по скольку кубиков будет в каждой части? 6 листов бумаги разделили поровну между двумя мальчиками. По скольку листов досталось каждому? 6 разделить пополам — сколько будет? Половина 6 — это сколько? 6 литров керосина разлили поровну в 2 бидона. Сколько литров налито в каждый бидон? Как это узнать?» (6 надо разделить на 2 равные части — получится по 3.)

Так же объясняется деление чисел 8 и 10. Здесь же учитель знакомит учащихся с записью деления, объясняя знак деления (вместо слов «разделить на 2 равные части» ставят две точки — $8:2=4$).

Дальше изучается деление на 2 чисел 12, 14, 16, 18, 20. При делении этих чисел применяется приём, основанный на распределительном свойстве умножения. Объяснение можно начать с задачи:

«12 книг поставили поровну на две полки. По скольку книг поставили на каждую полку?»

«Как узнать, сколько книг поставили на каждую полку?» (Надо 12 разделить на две равные части, пополам.)

«Какое самое большое число вы умеете делить пополам?» (10.)

«Разделите 10 пополам. Сколько получится? Сколько остаётся ещё разделить?» (2.) «Разделите 2 пополам. Сколько получится?» (1.) «А всего сколько получится?» (5 да 1 будет 6.)

«Сколько же будет, если 12 разделить пополам? Значит, сколько книг поставили на каждую полку?» (6.)

Так выполняется деление: чисел 14, 16, 18, 20 на 2; чисел 12, 15, 18 на 3; чисел 12, 16, 20 на 4; чисел 15, 20 на 5.

После этого нужно показать *основной* приём отыскания частного — на основании таблицы умножения.

Для этого нужно выписать на классной доске таблицу умножения на 2, а рядом с ней примеры с неизвестным множимым и примеры на деление.

$2\times 2=4$	$?\times 2=4$	$4:2=2$
$3\times 2=6$	$?\times 2=6$	$6:2=3$
и т. д.	и т. д.	и т. д.

Объяснение каждого случая ведётся примерно в следующей форме:

«Прочитайте первый пример: $2 \times 2 = 4$». (По 2 взять 2 раза, будет 4.)

«Какое число надо повторить 2 раза, чтобы получить 4?» (2 надо повторить два раза, чтобы получилось 4.)

«Значит, если 4 разделить на две равные части — сколько получится?» (4 разделить на две равные части, получится по 2.) Покажем деление на рисунке 39:

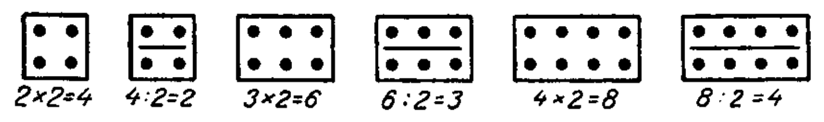


Рис. 39.

2 кружочка повторить 2 раза, будет 4 кружочка; 4 кружочка разделить на две равные части — получится по 2; 3 кружочка повторить 2 раза, будет 6; 6 кружочков разделить на две равные части, получится по 3 и т. д.

В заключение хором и в одиночку читается таблица деления на 2, которая даётся на дом для усвоения наизусть.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ.

ПЕРВАЯ СОТНЯ.

В концентре «Первая сотня» с большей полнотой, чем в пределе второго десятка, раскрывается сущность десятичной системы счисления: сотня составлена из десятков так же, как десяток составлен из простых единиц. В пределе первой сотни ярко выявляются вычислительные приёмы сложения и вычитания, связанные с разложением двузначных чисел на составляющие их десятичные группы.

В пределе первой сотни полностью заключена таблица умножения, которая является основой для изучения умножения многозначных чисел. Здесь же впервые встречаются внетабличные приёмы умножения и деления.

Таким образом, знание первой сотни служит фундаментом для изучения всего последующего курса арифметики; поэтому она выделяется в особый концентр.

Изучение сотни занимает четвёртую четверть в I классе и три четверти учебного года во II классе.

НУМЕРАЦИЯ В ПРЕДЕЛЕ ПЕРВОЙ СОТНИ.

Устная нумерация.

При объяснении нумерации применяются в качестве наглядных пособий пучки палочек и арифметический ящик (бруски, кубики). Учащиеся должны иметь у себя на руках дидактический материал: палочки, спички и др.

Всё, что учитель поясняет на брусках, кубиках или на палочках, дети проделывают на своём счётном материале. Совместное применение демонстрационного и лабораторного приёмов даёт наилучшие результаты. Заканчиваются же занятия по каждому вопросу упражнениями без применения наглядных пособий.

1. Знакомство с десятком как с новой счётной единицей.

У учителя в качестве демонстрационного пособия на столе должны быть кубики и бруски арифметического ящика; у учащихся в качестве дидактического материала должна быть сотня палочек (прутиков, спичек).

Один учащийся по вызову учителя считает на столе кубики, остальные у себя на партах палочки.

Насчитав 10 палочек, дети связывают их в пучок; насчитав 10 кубиков, учитель заменяет их десятком — бруском. Счёт продолжается. Насчитав ещё 10 палочек, дети связывают их и получают второй пучок-десяток; учитель второй десяток кубиков заменяет вторым бруском. Получилось два десятка, или двадцать. Продолжая счёт дальше, ученики считают: «Двадцать один, двадцать два, двадцать три, двадцать четыре..., двадцать восемь, двадцать девять»; прибавив ещё одну палочку, получают третий полный десяток. Всего получилось три десятка, три-десять, или тридцать. Продолжая счёт дальше (тридцать один, тридцать два и т. д.), получают четвёртый десяток, или сорок. Так продолжается счёт до 100. У учащихся получится 10 пучков-десятков палочек, у учителя 10 десятков-брусков. 10 десятков составляют *сотню* или *СТО*.

Ученики считают десятками сначала так: один десяток, два десятка, три десятка и т. д.; потом: десять, двадцать, тридцать, сорок, пятьдесят, шестьдесят, семьдесят, восемьдесят, девяносто, сто. Обратный счёт: сто, девяносто, восемьдесят..., двадцать, десять. Здесь же делаются некоторые простейшие обобщения: каждый предмет при счёте называется единицей. Считать можно не только единицами, но и десятками. Десятками считают так же, как и единицами.

После ознакомления учащихся с десятком как счётной единицей надо поупражнять детей в раздроблении десятков в единицы и в превращении единиц в десятки.

«Покажите три десятка палочек. Как иначе назвать 3 десятка?» (Три десятка — тридцать.)

«Покажите девять десятков. Как можно назвать девять десятков?» (Девять десятков — это девяносто.) «Как иначе назвать четыре десятка? Восемь десятков? Шесть десятков?»

«Пятьдесят! Составьте это число из пучков и скажите, сколько в нём десятков?» (Пятьдесят — это пять десятков.)

«Семьдесят! Составьте число из пучков и скажите, сколько в нём десятков?» (Семьдесят — это семь десятков.)

«Сколько десятков в числе 100? В числе 90? В числе 40?» и т. д.

2. Составление двузначного числа из десятков и единиц.

Учитель показывает ученикам 2 бруска и 6 кубиков.

«Какое число они обозначают?» (Два бруска — два десятка; шесть кубиков — шесть единиц. Всего два десятка, шесть единиц.) «Как иначе назвать это число?» (Двадцать шесть.)

«Возьмите у себя четыре пучка и восемь палочек. Какое число они обозначают?» (Четыре десятка и восемь единиц.) «Как иначе назвать это число?» (Сорок восемь.)

«Как иначе назвать 9 десятков и 2 единицы? 7 десятков и 3 единицы? 4 десятка и 6 единиц?»

3. Разложение двузначного числа на десятки и единицы.

«58. Составим это число из брусков и кубиков. Сколько в этом числе десятков и сколько единиц?» (5 десятков и 8 единиц.)

«46. Составьте это число из пучков и палочек. Сколько в этом числе десятков и сколько единиц?» (4 десятка и 6 единиц.)

«Из скольких десятков и единиц состоит число тридцать три? Число сорок четыре? Число шестьдесят один?» и т. д.

4. Отвлечённый счёт до 100.

Некоторых детей затрудняет при счёте переход через круглые десятки; от некоторых из них можно услышать такой счёт: «сорок семь, сорок восемь, сорок девять, сорок десять». В таких случаях надо прибегать к объяснению на наглядных пособиях.

«Мы насчитали сорок девять. Обозначим это число на брусках и кубиках. Прибавим сюда ещё 1 кубик. Сколько у нас стало отдельных кубиков? Чем можно их заменить?» (Десятком.) «Заменим. Чем же обозначено теперь полученное число?» (Пятью брусками.) «Какое число обозначают 5 брусков?» (50.) «Значит, после числа 49 какое следующее число надо назвать?» (50.)

Уменье считать в пределе 100 проверяется при помощи следующих вопросов:

а) Какое число следует за числом 69? за числом 89? за числом 39?

б) Какое число находится перед числом 40? перед числом 90?

в) Какое число находится между числами 69 и 71? между числами 29 и 31? между числами 89 и 91?

г) Между какими числами находится число 40? число 90? число 60?

Письменная нумерация.

Объяснение записи чисел должно быть наглядным, конкретным. В качестве наглядных пособий могут быть использованы таблички, разделённые пополам, палочки и разрезные цифры. Обучение детей записи чисел может проходить в следующем порядке: 1) учитель называет число по разрядам, например 2 десятка 4 единицы; 2) ученики составляют это число из пучков и палочек, беря 2 пучка и 4 палочки; 3) пучки кладут на левую сторону таблички, палочки — на правую сторону; 4) кладут разрезные цифры — под десятками цифру 2, под единицами —

цифру 4; 5) называют полученное число «двадцать четыре» и 6) записывают его цифрами у себя в тетрадях.

После этого учитель упражняет детей в записи чисел без таблицы. «Научимся писать числа без таблицы. Запишем числа от 20 до 30. Напишите числа 21, 22, 23..., 28, 29. Сколько десятков и сколько единиц в каждом из этих чисел? Где пишутся единицы? Десятки? Запишите числа: от 70 до 80; от 50 до 60 и т. д.»

При этом надо ещё раз подчеркнуть поместное значение цифр, сформулировав правило: «*Единицы пишутся на первом месте справа, десятки — на втором месте*», или «Единицы пишутся справа, а десятки — слева». Нужно также обратить внимание учащихся на значение нуля: «*Нуль показывает, что в данном числе нет единиц*».

Десятки	*Единицы*
2	4

Рис. 40.

Чтение чисел. Учитель пишет одно за другим числа и предлагает ученикам прочитать их, спрашивая, почему они так прочитали их. Например, пишет число 78 и, предложив прочитать, спрашивает, почему это число «семьдесят восемь».

«Цифра 7 означает 7 десятков (стоит на втором месте); цифра 8 означает 8 простых единиц (стоит на первом месте); 7 десятков и 8 единиц — 78».

С таким подробным объяснением читаются 3—5 чисел, а дальше даётся ученикам задание прочитать числа по задачнику.

Для того чтобы учащиеся могли отчётливо представить себе место каждого числа в натуральном ряде чисел и хорошо усвоить счёт в пределе 100, полезно написать все числа до ста в виде таблицы:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

и т. д. до 100.

Такая таблица должна быть у каждого ученика в тетради; кроме того, нужно иметь и общеклассную таблицу большого размера, по которой проводятся следующие упражнения:

1. Считайте по порядку от 1 до 20, от 20 до 30, от 50 до 70 и т. д.

2. Найдите в таблице числа 46, 74, 28, 92. Сколько в каждом из этих чисел десятков и сколько единиц?

3. Покажите на таблице числа: 3-го десятка, 8-го десятка, 5-го десятка, 7-го десятка. Покажите число, которое состоит из 8 десятков и 5 единиц; из 4 десятков и 6 единиц и т. д.

4. Прочитайте числа третьего столбика (3, 13, 23, 33, 43 и т. д.).

5. Найдите в таблице числа: 5, 10, 15, 20, 25, 30 и т. д.

6. Сколько десятков: в 100? в 50? в 80? в 60?

7. Сколько единиц: в 5 десятках? в 9 десятках? в 3 десятках?

Много полезных упражнений можно проделать по этой таблице после перехода к сложению и вычитанию. Например: к 10 прибавляйте по 10, пока не получится 100.

К 5 прибавляйте по 5, пока не получится 100.

К 6 прибавляйте по 10, пока не получится 96.

От 94 отнимайте по 10, пока не получится 4.

ДЕЙСТВИЯ НАД КРУГЛЫМИ ДЕСЯТКАМИ.

Действия над круглыми десятками являются хорошим повторением пройденного. Здесь ещё раз повторяется таблица сложения в пределе 10, закрепляется понимание учащимися десятка как сложной счётной единицы и усваиваются такие навыки, которые в качестве необходимого элемента войдут в состав действий над любыми двузначными числами.

Сложение и вычитание круглых десятков. Этот навык всецело опирается на сложение и вычитание в пределе первого десятка. Здесь добавляется только раздробление десятков в единицы и превращение единиц в десятки.

В самом деле, чтобы сложить 50 и 30, нужно рассуждать так: «50 — это 5 десятков, 30 — это 3 десятка; к 5 прибавить 3 — будет 8; к 5 десяткам прибавить 3 десятка — будет 8 десятков; 8 десятков = 80. Значит, 50 да 30 будет 80».

Так же выполняется и *вычитание*. «Пусть нужно от 70 отнять 20. Рассуждаем так:

70 — это 7 десятков, 20 — это 2 десятка. От 7 десятков отнять 2 десятка — всё равно, что от 7 отнять 2; из 7 вычесть 2 — будет 5. Из 7 десятков вычесть 2 десятка — будет 5 десятков, или 50. Значит, 70—20 = 50».

С такими подробными объяснениями решаются первые примеры. В дальнейшем учитель прибегает к ним только в случае затруднений. Наглядными пособиями здесь могут служить бруски арифметического ящика и пучки палочек.

Умножение круглых десятков. Объяснение этого действия даётся в том же плане, как действия сложения и вычитания. Первые примеры решаются на основе следующего объяснения.

«Пусть нужно умножить 20 на 3. Рассуждаем так: 20 — это 2 десятка. По 20 взять 3 раза — всё равно, что по 2 десятка взять 3 раза; 3 раза по 2 десятка — будет 6 десятков, или 60. Значит, $20 \times 3 = 60$».

Здесь наряду с термином «взять столько-то раз» можно всё чаще и чаще пользоваться термином «умножить». «По 50 взять 2 раза — сколько получится? 50 умножить на 2 — сколько будет?

Теперь решите несколько примеров на умножение». Так исподволь, постепенно учащиеся будут привыкать к правильному математическому языку.

Деление круглых десятков на равные части.

Делитель в этом случае — однозначное число.

Первоначально решаются примеры, в которых частное равно 10, например: 50 : 5=10; 70 : 7=10; 90 : 9=10. Затем решаются примеры, в которых частное равно нескольким десяткам, например: 80 : 2=40; 90 : 3=30 и т. д. И здесь приходится опираться на деление в пределе первого десятка.

«Пусть дано 50 разделить на 5 равных частей. Пятьдесят — это 5 десятков; 5 десятков разделить на 5 равных частей — будет по одному десятку, или по 10. Значит, 50 : 5 = 10».

«Пусть дано: 80 : 2. Восемьдесят — это 8 десятков; 8 десятков разделить на 2 равные части — будет по 4 десятка, или по сорок. Значит, 80 : 2 = 40».

Эти примеры полезно проиллюстрировать на брусках арифметического ящика. 8 брусков делятся пополам, получается по 4 бруска, или по 40.

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ В ПРЕДЕЛЕ 100.

(II класс)

На этом этапе изучения арифметики нужно добиться отчётливого понимания учащимися вычислительных приёмов, применяемых при сложении и вычитании двузначных чисел. Это типичные приёмы устных вычислений. Научить детей владеть вычислительными приёмами сложения и вычитания в пределе 100 — это значит научить их основам устного счёта. Обучение приёмам вычислений нужно вести в строгой системе, на наглядных пособиях. Нужно не только объяснять учащимся, но и требовать от самих учеников объяснения того, как они выполнили действие над данными числами.

Все случаи сложения и вычитания в пределе 100 могут быть разделены на две группы: а) сложение и вычитание без перехода через десяток; б) сложение и вычитание с переходом через десяток.

К первой группе принадлежат такие случаи сложения, в которых сумма единиц слагаемых меньше или равна 10 (32 + 45; 58 + + 22), и соответствующие им случаи вычитания, в которых единицы уменьшаемого больше единиц вычитаемого или единиц вовсе нет (68 — 35; 90 — 43). Вторую группу образуют такие случаи сложения, в которых сумма единиц слагаемых больше 10, и случаи вычитания, в которых единицы уменьшаемого меньше единиц вычитаемого.

Сложение и вычитание без перехода через десяток.

Сюда относятся следующие случаи сложения и вычитания:

1) 50+6; 6+50; 84—4; 84—80, т. е. сложение круглых десятков с единицами и вычитание из двузначного числа его единиц или десятков. Эти случаи требуют только знания нумерации.

2) $35+4$; $48-5$; $6+42$, т. е. прибавление к двузначному числу однозначного числа, которое вместе с единицами первого слагаемого составляет меньше 10, и вычитание из двузначного числа однозначного числа, которое меньше единиц уменьшаемого.

Приём сложения в данном случае показывается на брусках и кубиках арифметического ящика или на пучках-десятках и отдельных палочках. Пример $6+42$ решается на основе перестановки слагаемых.

Приём вычитания состоит в том, что единицы вычитаются из единиц уменьшаемого, не трогая десятков. Иллюстрируется этот приём на тех же наглядных пособиях, что и сложение.

3) $35+20$; $58-30$; $40+32$, т. е. прибавление к двузначному числу круглых десятков и, наоборот, к круглым десяткам двузначного числа; вычитание круглых десятков из двузначного числа.

Приём сложения и вычитания в данном случае заключается в том, что десятки прибавляются и вычитаются из десятков двузначного числа: $35+20=(30+20)+5$; $58-30=(50-30)+8$. Пример $40+32$ решается так же, как и предыдущий: $40+32=(40+30)+2$.

Все эти приёмы поясняются либо на брусках и кубиках, либо на пучках и палочках.

4) $46+32$; $78-32$, т. е. сложение и вычитание двузначных чисел. Существует два приёма сложения и вычитания этих чисел:

Первый приём, когда десятки складываются с десятками, единицы — с единицами и полученные числа складываются; например: $46+32=(40+30)+(6+2)=70+8=78$.

Второй приём, когда разлагается на разряды только второе слагаемое и к первому слагаемому прибавляются сначала десятки, а потом единицы второго слагаемого: $46+32=(46+30)+2=76+2=78$.

Вычитание проводится по аналогии со сложением:

$$78-32=(78-30)-2=48-2=46,$$
$$\text{или: } 78-32=(70-30)+(8-2)=40+6=46.$$

5) $26+4$; $4+26$; $30-4$. Этот случай сложения называется дополнением двузначного числа до круглых десятков: единицы прибавляются к единицам, получается десяток; этот десяток прибавляется к десяткам.

Для показа вычитания на примере $30-4$ берутся три пучка-десятка палочек. Один десяток-пучок развязывают и от 10 палочек отнимают 4 палочки. Остаётся два целых пучка да ещё 6 палочек, всего 26 палочек.

Для решения примера $4+26$ нужно воспользоваться приёмом перестановки слагаемых.

6) $48+32$; $80-48$, т. е. сложение двузначных чисел, когда

сумма единиц равна 10, и вычитание двузначного числа из круглых десятков.

В данном случае десятки складываются с десятками, единицы — с единицами.

$$48 + 32 = (40 + 30) + (8 + 2) = 70 + 10 = 80$$

Вычитание выполняется так: от 80 отнимается 40, остаётся 40; от 40 отнимается 8, остаётся 32. Чтобы от 40 отнять 8, надо один десяток раздробить в единицы.

Сложение и вычитание с переходом через десяток.

1) 38 + 6; 7 + 26; 42 — 5, т. е. прибавление к двузначному числу однозначного и вычитание из двузначного числа однозначного.

В первом примере сложение может быть выполнено двояким способом.

Первый способ. Дополняют первое слагаемое до круглых десятков, прибавляя к нему 2, а потом к 40 прибавляют остальные 4 единицы. Этот приём требует хорошего знания таблицы сложения в пределе только 10.

Второй способ. Разлагают 38 на десятки и единицы (3 десятка и 8 единиц), складывают 8 и 6, затем полученную сумму 14 прибавляют к 30.

$$38 + 6 = 30 + (8 + 6) = 30 + 14 = 44.$$

Вычитание производят так: отнимают от уменьшаемого (42) его единицы, чтобы сделать уменьшаемое круглым числом, а потом от 40 отнимают остальные 3 единицы. Возможны и другие приёмы вычитания. Так, можно было бы от 40 отнять 5 и к остатку прибавить 2, или разбить 42 на два числа — 30 и 12 — и от 12 отнять 5.

Сложение в примере 7 + 26 выполняется на основе перестановки слагаемых.

2) 57 + 28; 82 — 45, т. е. сложение двузначного числа с двузначным, когда сумма единиц больше 10; вычитание двузначного числа из двузначного, когда единицы уменьшаемого меньше единиц вычитаемого. Чтобы сложить 57 и 28, поступают так: складывают десятки с десятками (50 + 20 = 70), единицы с единицами (7 + 8 = 15), затем складывают обе суммы (70 + 15 = 85).

Можно сложить эти числа, не разбивая первое слагаемое на десятки и единицы: к 57 прибавить 20, получится 77; к 77 прибавить 8, получится 85.

Чтобы от 82 отнять 45, отнимают от 82 сначала 40, остаётся 42; затем от 42 отнимают 5, остаётся 37.

Существуют для данного случая и другие приёмы вычитания. Так, можно от 82 отнять 42, чтобы получить круглые десятки (40), а затем от круглых десятков отнять остальные 3 единицы, или можно разбить 82 на два числа — 70 и 12 — и затем вычитать 40 из 70 и 5 из 12.

Этими ступенями и исчерпываются все случаи сложения и вычитания в пределе 100. Они расположены в порядке постепенно возрастающей трудности. Каждый предыдущий случай является основой для последующего; навык в решении предыдущего примера входит в состав более сложного последующего навыка.

Более трудными являются последние примеры: сложение двузначных чисел с переходом через десяток (типа 48 + 37) и соответствующее ему вычитание (типа 82 — 36).

Нужно следить за тем, чтобы при чтении примеров речь учащихся была правильной, чтобы имена числительные склонялись правильно. Пример 45 + 37 = 82 должен читаться так: «К с о р о к а п я т и прибавить 37, получится 82». Или: «К числу сорок пять прибавить тридцать семь, получится 82». Или: «Сорок пять да тридцать семь будет 82». Первая и вторая формы применимы тогда, когда ученики записывают примеры под диктовку учителя; третья форма может употребляться, когда ученики ч и т а ю т написанные примеры по задачнику или по своим тетрадям.

Пример 92 — 28 = 64 должен читаться так: «О т д е в я н о с т а д в у х отнять двадцать восемь, получится (или останется) шестьдесят четыре». Или: «Из девяноста двух в ы ч е с т ь двадцать восемь, получится шестьдесят четыре». Или: «От числа девяносто два отнять двадцать восемь, останется шестьдесят четыре». Наконец: «Девяносто два без двадцати восьми будет шестьдесят четыре».

РАЗНОСТНОЕ СРАВНЕНИЕ.

Учащиеся уже решали такие задачи и примеры, где разность фигурировала как д а н н о е число, например: «У одной девочки было 10 картинок, у другой — на 3 картинки меньше. Сколько картинок было у другой девочки? Какое число меньше 9 на 4 единицы» и т. д. Теперь нужно ознакомить учащихся с решением таких задач и примеров, в которых разность двух величин или чисел является искомой, например: «В одной коробке 28 перьев, в другой 20. На сколько перьев в первой коробке больше, чем во второй?»

В этой задаче данными являются два числа, искомым — их разность. Такого рода задачи относятся к задачам на разностное сравнение. На их решении расширяется смысл вычитания. Учащиеся узнают, что вопрос «на сколько одно число больше или меньше другого» решается вычитанием.

Прежде чем решать з а д а ч и на разностное сравнение, нужно выяснить это понятие на наглядных пособиях, причём демонстрация пособий должна быть проведена так, чтобы из неё как можно ярче и убедительнее вытекала необходимость вычитания. Здесь самое трудное для детей заключается в том, что для ответа на вопрос — «на сколько одно число больше или меньше другого» — нужно из большего числа вычесть меньшее. На преодоление этой трудности и должно быть направлено всё внимание учащихся.

Понятие разностного сравнения выясняется сначала на величинах, потом на числах.

1. Учитель показывает ученикам две ленты разной длины — длинную (красную) и короткую (голубую). «Сравним эти ленты по длине и узнаем, на сколько красная лента длиннее голубой»,— говорит учитель.

«Для этого голубую ленту приложим к красной (учитель показывает, как надо приложить), надрезом отметим то место, где приходится край голубой ленты, и отрежем от красной ленты кусок, равный по длине голубой ленте (учитель отрезает). Получился остаток, который показывает, на сколько красная лента длиннее голубой. Измерим этот кусок (измеряет). В нём, допустим, 10 *см* Значит, красная лента длиннее голубой на 10 *см*.

Как же мы узнали, на сколько красная лента длиннее голубой? Мы приложили голубую ленту к красной, отметили на красной ленте длину голубой ленты и отрезали от красной ленты кусок, равный по длине голубой».

2. Учитель раздаёт учащимся по две полоски бумаги, предлагает сравнить их по длине и показать, на сколько одна полоска длиннее другой.

3. Учитель вызывает к столу двух учеников и даёт одному 4 карандаша, другому 6 карандашей. «Кому дано больше карандашей и на сколько больше?» Для этого узнаем, сколько л и ш н и х карандашей дано второму ученику.

«Отдай мне твои карандаши»,— говорит учитель, обращаясь к первому ученику, получившему 4 карандаша.

«Отдай и ты с т о л ь к о же, оставь только л и ш н и е»,— говорит учитель, обращаясь к ученику, получившему 6 карандашей. «Сколько карандашей осталось лишних?» (2 карандаша.)

«На сколько же 6 больше 4?» (На 2.) «Как это мы узнали?» (От 6 карандашей о т н я л и 4 карандаша.)

«Как узнать, на сколько 6 карандашей больше 4 карандашей?» (Н а д о о т 6 к а р а н д а ш е й о т н я т ь 4 к а р а н д а ш а.)

На доске учитель записывает: 6 кар.— 4 кар.=2 кар. Запись читается так: 6 карандашей больше 4 карандашей на 2 карандаша.

4. Учитель предлагает ученикам положить на парту сверху 10 палочек, внизу под ними 6 палочек. «Сравните, где палочек больше и на сколько больше». Учащиеся отсчитывают от 10 палочек 6 палочек. «Сверху на 4 палочки больше»,— говорят ученики.— «Как же вы узнали, на сколько палочек сверху больше, чем внизу?» По предложению учителя дети записывают в своих тетрадях: 10 пал.— 6 пал.= 4 пал., читая эту запись так: «От 10 палочек отнять 6 палочек, получится 4 палочки. По другому: 10 палочек больше 6 палочек на 4 палочки».

5. Возвращаясь к сравнению лент, учитель говорит: «Чтобы узнать, на сколько одна лента длиннее другой, мы прикладывали одну ленту к другой, отрезали кусок и измеряли остаток. Теперь я вам покажу, как можно сравнить ленты по длине, не приклады-

вая их друг к другу. Измерим одну ленту; получили 40 *см*; измерим другую ленту; получили 30 *см*. На сколько же 40 *см* больше 30 *см*? Отнимем от 40 *см* 30 *см* и узнаем, на сколько красная лента длиннее голубой.

40 *см* — 30 *см*=10 *см*.

6. «Сколько надо добавить к 4 карандашам, чтобы получить 6 карандашей?» (2 карандаша). «На сколько же 4 карандаша меньше 6 карандашей»? (На 2 карандаша.)

Сколько надо добавить к 30 *см*, чтобы получить 40 *см*? На сколько же 30 *см* меньше 40 *см*? Что надо сделать, чтобы узнать: а) на сколько 4 карандаша меньше 6 карандашей; б) на сколько 30 *см* меньше 40 *см*.

Вывод. Чтобы узнать, на сколько одно число больше или меньше другого, надо от большего числа отнять меньшее.

На втором уроке учащиеся упражняются в решении простых задач на разностное сравнение. В этих задачах фигурируют термины: «больше — меньше», «дороже — дешевле», «тяжелее — легче», «длиннее — короче», «шире — уже», «выше — ниже» и т. д. Попутно проводятся упражнения в сравнении отвлечённых чисел: «На сколько: 10 больше 7? 28 больше 14? 15 меньше 25? 12 меньше 18?» и т. д.

На третьем уроке разностное сравнение вводится в состав сложных задач, решаемых двумя-тремя действиями; например: «Ученик купил 2 карандаша по 20 коп. и 6 тетрадей по 10 коп. На сколько больше стоили тетради, чем карандаши?»

Наряду с решением готовых задач ученики должны упражняться в составлении своих задач, в которых требуется узнать, на сколько одно число больше или меньше другого.

Заканчивается изучение данного вопроса упражнениями, в которых находит своё практическое применение уменье сравнивать числа в разностном отношении. Ученики получают от учителя индивидуальные задания, в числе которых может быть:

1) сравнить длину и ширину своего класса, 2) сравнить длину ручки и карандаша, 3) сравнить длину двух данных отрезков, 4) сравнить длину и ширину данного прямоугольника, 5) сравнить длину и ширину тетради, переплёта книги, 6) сравнить количество учащихся в первом и втором классе (числа даются учителем), 7) сравните количество учащихся в различных звеньях, 8) сравнить количество ясных и пасмурных дней по календарю природы и т. д.

ДЕЛЕНИЕ ПО СОДЕРЖАНИЮ.

Деление по содержанию — один из видов единого действия — деления. Учащиеся уже знакомы с другим видом этого действия — с делением на равные части. У обоих этих видов деления общее название действия (деление), общий знак действия (две точки),

общее название чисел в этом действии (делимое, делитель, частное). Но задачи, решаемые каждым видом деления, имеют совершенно различный смысл, различное предметное содержание. При таких условиях перед учителем стоит опасность, что дети будут смешивать эти виды деления, не чётко различать их. А между тем на первых порах изучения деления учащиеся должны строго разграничивать их; в дальнейшем произойдёт объединение обоих этих частных понятий в одно общее понятие — деления: границы между ними будут стёрты. Первые шаги в этом направлении делаются уже во II классе; здесь на определённом этапе формирования этого понятия обращается внимание детей на то обстоятельство, что при решении примеров можно не считаться с видом деления, потому что к какому виду деления мы ни относили бы данный пример, всё равно результат получится один и тот же. Но вначале каждый вид деления со всеми его специфическими особенностями изучается самостоятельно, независимо друг от друга. Целесообразно, чтобы при этом оба вида деления имели своё название — «деление на равные части», «деление по содержанию» и чтобы дети знали эти названия и пользовались ими.

Как же добиться того, чтобы дети успешно усвоили оба вида деления и не смешивали их, чтобы они знали черты сходства и черты различия в этих очень близких, родственных между собой понятиях?

Для этого нужно: а) основательно изучить деление на равные части (это уже сделано в основном в I классе и закрепляется во II классе); б) потом также основательно изучить деление по содержанию и в) наконец, сравнить, сопоставить оба вида деления, отметив при этом, что в них сходного и чем они различаются между собой. Не следует спешить с переходом к третьему этапу работы — к сопоставлению, к сравнению. Сначала нужно добиться того, чтобы деление по содержанию само по себе довольно отчётливо вырисовывалось в сознании детей, чтобы дети научились путём решения довольно большого количества соответствующих задач понимать смысл этого вида деления. И только после того, как ученики усвоят деление по содержанию, нужно вспомнить деление на равные части и сравнить их, сделав из этого сравнения доступные детям выводы.

Выяснение смысла деления по содержанию нужно проводить на наглядных пособиях, опираясь на соответствующие зрительные образы. Они — эти образы — должны сопровождать весь процесс работы над делением. Разбить 9 учеников на группы по 3 человека в каждой и подсчитать, сколько получилось групп; расставить 10 учеников парами и подсчитать, сколько получилось пар; расставить 12 кубиков по 4 кубика и подсчитать, сколько получилось четвёрок; разложить 16 книг стопками по 4 книги в каждой и подсчитать, сколько получилось стопок и т. д.

Очень удобным наглядным пособием при иллюстрации деления по содержанию являются кружочки: их можно легко и быстро ри-

совать на доске и в тетрадях. Например, на 12 кружочках легко показать процесс деления 12 по 2, по 3, по 4, по 6 и способ нахождения результата каждого деления.

Особый смысл деления по содержанию находит своё выражение и в своей особой терминологии, которой надо учить детей настойчиво и выдерживать строго, пока не произойдёт процесс обобщения и объединения обоих видов деления.

Так, если по смыслу решения задачи нужно узнать, сколько раз 2 содержится в 10, то мы должны, записав деление 10 : 2=5, прочитать эту запись так: «10 разделить по 2, получится 5», причём вначале целесообразно добавлять: «5 раз по 2». Для этого вида деления характерны термины: «содержится», «повторится», которые должны звучать на всех уроках деления по содержанию, начиная с первого.

«Сколько раз 2 *содержится* в 10? Сколько раз 2 *повторяется* в 10? Сколько получится, если 10 разделить по 2?» — Дети должны понимать, что все эти вопросы имеют одно значение и относятся к одному примеру (10 : 2=).

Деление по содержанию имеет свои особенности и в записи действия. Когда решается задача на деление по содержанию, то наименование ставится как при делимом, так и при делителе, а результат всегда является отвлечённым числом. Нужно помнить, что научить детей правильно записывать деление по содержанию с соблюдением принятой установки — задача не простая. Что же здесь затрудняет ученика и как преодолеваются эти трудности?

Чрезвычайно важно научить детей при делении по содержанию смотреть на частное как на *отвлечённое* число, показывающее, сколько раз одно число содержится в другом. Это — единственное в данном случае значение частного; ничего другого оно не обозначает. Но усвоению этой простой истины ученику сильно мешает поспешное приписывание к частному наименования, хотя бы и заключённого в скобки. Вообще говоря, приписывание к частному наименования целесообразно: оно экономит время и место. Но к этой записи надо подвести учеников постепенно, через ряд промежуточных этапов, на которых частное сначала должно выступить именно как отвлечённое число, к которому не приписывается никакого наименования. Для этого достаточно подобрать такие задачи, которые оканчиваются вопросом: «Сколько раз...?» Например: «Для поливки гряд школьники принесли 12 вёдер воды. Сколько раз они ходили за водой, если каждый раз приносили по 2 ведра?»

«Для ремонта дома колхозник привёз из лесу 15 брёвен. Сколько раз он ездил за этими брёвнами, если за один раз привозил 3 бревна?»

Решая эти задачи, ученик записывает их решение так:

1) 12 в. : 2 в. = 6.
2) 15 бр. : 3 бр. = 5.

Здесь совершенно естественно получаются в результате отвлечённые числа — 6 и 3.

Некоторые учителя учат детей писать «6 р а з», «3 р а з а». Это делать не нужно. Ведь не пишут же слово «раз» при множителе в умножении, хотя множитель всегда показывает, сколько раз нужно повторить слагаемым множимое. Подобно этому не нужно писать слово «р а з» и в частном, когда оно играет роль искомого множителя.

Решение задач подобного рода составляет первый этап в обучении детей записи деления по содержанию. На втором этапе, обычно уже на втором уроке, можно перейти к записи решения таких задач, где частное обозначает число каких-либо предметов, например: «12 тетрадей разделили ученикам, по 3 тетради каждому. Сколько учеников получили тетради?»

Решая эту задачу и отвечая на её вопрос, дети рассуждают так: тетради получили столько учеников, сколько раз 3 тетради содержатся в 12 тетрадях. Чтобы узнать, сколько раз 3 тетради содержатся в 12 тетрадях, разделим 12 тетрадей по 3 тетради, получится 4.

12 т. : 3 т. = 4.

Значит, тетради получают 4 у ч е н и к а. «4 ученика» являются ответом на вопрос задачи. Напишем этот ответ рядом с числом 4, поставив между ними точку с запятой; получится в конечном результате запись:

12 т. : 3 т. = 4; 4 ученика.

Таким образом, в задачах на деление по содержанию получается сложный ответ: в данной задаче число 4 повторяется дважды. Это соответствует двум этапам рассуждения:

1-й этап: 3 тетради содержатся в 12 тетрадях 4 раза.

2-й этап: значит, тетради получат 4 ученика.

Ответ в задачах на деление по содержанию получается не сразу и не прямо, а постепенно, косвенным путём, через дополнительное рассуждение.

Такой записью пользуются ученики на протяжении всего периода первоначального ознакомления с делением по содержанию, т. е. на протяжении первых шести уроков.

На седьмом уроке, на котором ученики упражняются в р а з л и ч е н и и обоих видов деления, им можно показать другую, общепринятую условную запись результата, в которой к отвлечённому числу приписывается наименование с заключением его в скобки:

12 т. : 3 т. = 4 (ученика).

Переводя учащихся с одной формы записи на другую, учитель показывает преимущества последней записи: записывая «4 (ученика)» вместо «4; 4 ученика», не приходится дважды переписывать

число 4, не нужно ставить точку с запятой; проще и скорее заключить слово в скобки.

Однако и в этой записи надо видеть два ответа: а) число 4, взятое само по себе, показывает, сколько раз число 3 содержится в 12; б) ответ «4 (ученика)» является ответом на вопрос задачи (сколько учеников получили тетради).

Как научить детей легче и быстрее находить результат при делении по содержанию? При первоначальном объяснении этого вида деления, когда выясняется, сколько раз одно число содержится в другом, можно пользоваться последовательным вычитанием. Так, отложив на счётах 10 косточек и сбрасывая (отнимая) по две косточки, можно наглядно показать, что в 10 5 двоек, что двойка в 10 содержится 5 раз. Однако основным приёмом нахождения частного является установление связи деления с умножением и использование при этом знания таблицы умножения. Например, чтобы узнать, сколько получится, если 18 разделить по 3, надо ставить вопрос так: «Сколько раз надо взять по 3, чтобы получить 18?» Ученик знает из таблицы умножения, что 6 раз по 3, будет 18. Значит, при делении 18 по 3 получится 6.

Раскроем примерное содержание первых уроков, на которых даётся первоначальное знакомство с делением по содержанию.

1-й урок.

Цель урока. На разнообразных наглядных пособиях дать ученикам первоначальное понятие о делении по содержанию как о делении, при помощи которого узнают, сколько раз одно число содержится или повторяется в другом.

Содержание урока.

1. На самих детях наглядно выясняется смысл деления по содержанию. Учитель ставит перед классом 6 (8, 10, 12) учеников и расставляет (разбивает, делит) их на пары, на тройки, четвёрки. Количество получаемых пар, троек, четвёрок подсчитывается. Сколько пар получится, если 8 учеников разделить по 2 ученика, (или на пары)? Сколько троек получится, если 12 учеников разделить по 4 ученика? и т. д.

2. Работа по выяснению смысла и приёма деления по содержанию продолжается далее на классных счётах.

«Разделим 8 косточек по 2 косточки. Сколько пар получилось?»

«Разделим 9 косточек по 3 косточки. Сколько троек получилось?»

«Нужно 10 косточек разделить по 2 косточки. Иди, N., к счётам, проделай это деление и подсчитай результат».

«Нужно 6 косточек разделить по 3 косточки. Иди, N., к счётам, произведи деление и подсчитай, сколько получилось троек».

3. Все учащиеся на своём дидактическом материале (на палочках и др.) по заданию учителя выполняют деление палочек на группы по 2, по 3, по 4 палочки и подсчитывают количество получаемых групп.

«Отсчитайте и положите перед собой на парте 12 палочек. Разделите их на группы по 3 палочки. Сколько получится групп — троек?»

«Отложите 10 палочек. Разделите их на группы по 2 палочки в каждой. Сколько двоек (пар) получится?»

«Отложите 8 палочек и разделите их на группы по 4 палочки в каждой. Сколько четвёрок получится?»

4. Учитель знакомит детей с записью деления по содержанию, сопровождая записью более лёгкие случаи конкретного деления (деления по 2).

Учитель рисует на доске кружочки, делит их по 2 и сопровождает процесс деления записью:

0000	00 00	4 : 2 = 2
000000	00 00 00	6 : 2 = 3
00000000	00 00 00 00	8 : 2 = 4
0000000000	00 00 00 00 00	10 : 2 = 5

Каждая строчка сопровождается объяснением:

«Сколько кружочков нарисовано слева?» (4 кружочка.)

«Что сделано с этими кружочками?» (их разделили по 2.)

«Сколько получилось пар?» (2 пары.)

«Итак, если 4 кружочка разделить по 2 кружочка, получится 2». (2 раза и 2 кружочка.)

«Прочитайте запись: 4 : 2 = 2» (4 разделить по 2, получится 2.)

Ученики рисуют эти кружочки у себя в тетрадях, делят их по 2 и записывают деление.

5. Задание на дом: нарисовать 12, 14, 16, 18, 20 кружочков, разделить их по 2 кружочка, подсчитать число двоек в каждом примере и записать деление по образцу того, как это делалось в классе. Учитель показывает ученикам более простой способ выполнения задания; нарисовав, например 12 кружочков, можно делить по 2 эти же кружочки, не перерисовывая их и соединяя каждую пару дужками.

00 00 00 00 00 00 12 : 2 = 6

2-й урок.

Цель урока. Продолжить работу первого урока по формированию у детей понятия о делении по содержанию — на решении простых задач; познакомить детей: а) с терминами «содержится», «повторится», б) с записью решения задач на деление по содержанию.

Содержание урока.

1. В процессе проверки домашнего задания ставятся вопросы:

«Сколько получится, если 12 кружочков разделить по 2 кружочка?»

«Сколько получится, если 14 кружочков разделить по 2 кружочка?» и т. д. Затем учитель ставит вопрос в иной формулировке: «Сколько раз 2 содержится в 16?», «Сколько раз 2 повторяется в 16», поясняя, что двойка содержится в 18 9 раз, поэтому если 18 разделить по 2, то получится 9 (9 раз по 2). От учащихся требуется, чтобы они, отвечая полными ответами, вводили в свои ответы термины «содержится», «повторяется»: «2 содержится в 10 5 раз», 2 · 14 повторяется 7 раз» и т. д.

2. Решение двух задач, на которых дети учатся: а) объяснять деление по содержанию и б) записывать деление по содержанию.

Задача первая: «Для поливки грядок дети принесли из колодца 12 вёдер воды. Каждый раз они приносили по 2 ведра. Сколько раз они ходили за водой?»

Сделав зарисовку на доске (изображение 12 вёдер), учитель учит детей сначала давать ответ в общей форме, не называя числа: «Дети ходили за водой столько раз, сколько раз 2 ведра содержатся (повторяются) в 12 вёдрах». Этот ответ повторяется несколько раз и несколькими учащимися. Далее ставится вопрос: «Что же нужно сделать, чтобы узнать, сколько раз 2 ведра содержатся в 12 ведрах?» По рисунку это узнаётся простым подсчётом: «Объединяем вёдра по 2 и считаем: 1 раз, 2 раза... 6 раз. А не имея

рисунка мы должны разделить 12 ведёр по 2 ведра и найти результат с помощью умножения. Запись решения:

12 вед. : 2 вед. = 6.

Ответ даётся в полной форме: «Дети ходили за водой 6 раз».

С таким же подробным объяснением и такой же записью решается вторая задача: «Для постройки сарая колхозник привёз из лесу 14 брёвен, привозя каждый раз по 2 бревна. Сколько раз он ездил в лес за брёвнами?»

Решение каждой задачи записывается учащимися в тетради. Перед этим учитель ещё раз обращает внимание детей на особенности записи решения: при обоих данных числах пишется наименование (вёдра, брёвна), а при том числе, которое получается, наименование не пишется: оно показывает, сколько раз одно число содержится в другом.

3. Решение примеров на деление по содержанию с объяснением и проверкой (при помощи умножения):

18 : 2 = 9	14 : 2 = 7
2 × 9 = 18	2 × 7 = 14

Решая эти примеры, учитель учит детей ставить вопросы так: «Сколько раз надо взять по 2, чтобы получить 18?». «Сколько раз надо взять по 2, чтобы получить 14?» А после нахождения результата последний проверяется умножением.

4. Задание на дом: а) Решить задачу: «Надя в течение дня несколько раз ходила в ягодник и каждый раз приносила оттуда по 2 корзины ягод. А всего она собрала за день 6 корзин Сколько раз Надя ходила за ягодами?»

б) Решить примеры с проверкой:

4 : 2	10 : 2	16 : 2
6 : 2	12 : 2	18 : 2
8 : 2	14 : 2	20 : 2

3-й урок.

Цель урока. Познакомить учащихся с решением таких задач на деление по содержанию, в которых результату решения приписывается какое-либо предметное значение; составить таблицу деления по 3 в пределе 30.

Данный урок, как и все последующие, состоит из двух основных частей; первая часть урока посвящается составлению таблицы деления (по 3, по 4, по 5 и т. д.), вторая часть — решению простых задач на деление по содержанию.

В начале урока проводится проверка домашнего задания.

Содержание урока.

1. Составление таблицы деления по 3. Для этой цели в качестве наглядного пособия используются упомянутые выше кружочки. Учитель рисует их на классной доске, привлекает детей к делению их по 3 кружочка и, опираясь на эти зрительные образы, составляет таблицу деления по 3, которая читается хором и в одиночку, подряд и вразбивку. Таблица записывается детьми в свои тетрадки и к следующему уроку усваивается учащимися наизусть.

2. На этом уроке учитель впервые знакомит детей с решением таких задач, в которых найденный результат означает не «разы», а имеет то или иное предметное содержание. Своеобразие содержания таких задач находит отражение и в форме записи их решения, где появляется двойной ответ.

Решение таких задач начинается с выполнения конкретных заданий учителя: а) раздать ученикам 12 тетрадей, по 3 тетради каждому, и узнать, сколько учеников получат тетради; б) разделить ученикам 10 карандашей, по

2 карандаша каждому ученику, и узнать, сколько учеников получат карандаши; в) заполнить 15 карандашами коробки, положив в каждую по 5 карандашей, и подсчитать число коробок и т. д.

Эти задания могут выполняться двояко. Можно сразу приступить к непосредственной раздаче тетрадей ученикам и подсчёту числа учеников, получивших тетради. Это — простой способ; он применим тогда, когда деление носит вполне конкретный характер в форме раздачи предметов определённым лицам, заполнение предметами определённых объёмов. Но он непригоден для тех случаев, когда отсутствуют объекты деления и когда приходится делить числа. Поэтому с такого приёма раздачи надо начать, но вслед за этим на втором или третьем примере надо показать и тот приём, который типичен для деления чисел, т. е. общий приём деления по содержанию.

Показ этого приёма проводится так.

Учитель даёт задание — раздать 10 карандашей, по 2 карандаша каждому ученику, и узнать, сколько учеников получат карандаши.

«Скажите, пока не называя числа, сколько учеников получат карандаши?» (Столько учеников, сколько раз 2 карандаша содержится в 10 карандашах.)

«Как узнать, сколько раз 2 карандаша содержится в 10 карандашах? Что для этого надо сделать?» (Надо 10 карандашей разделить по 2 карандаша.)

Положив карандаши на стол, ученик делит их по 2 и получает в результате 5.

«Сколько раз 2 карандаша содержится в 10 карандашах? (5 раз.) Значит, сколько же учеников получат карандаши?» (5 учеников.) «Не раздавая карандаши, мы уже узнали, что 5 учеников получат их.

Раздай карандаши ученикам, по 2 карандаша, и подсчитай число учеников, получивших карандаши.

Запишем решение: 10 кар. : 2 кар. = 5.

Делением мы узнали, что 2 карандаша содержится в 10 карандашах 5 раз. А какой вопрос задачи?» Сколько учеников получат карандаши? (5 учеников). «Да, 5 учеников. Напишем «5 учеников» так: после цифры 5 поставим точку с запятой и дальше напишем «5 учеников».

Получается запись: 10 кар. : 2 кар. = 5; 5 учеников.

СОПОСТАВЛЕНИЕ ОБОИХ ВИДОВ ДЕЛЕНИЯ.

После того как дети ознакомятся с делением на равные части и делением по содержанию отдельно одно от другого и поймут смысл каждого из них, нужно сопоставить оба вида деления, выявить их сходство и различие. Это делается сначала на наглядных пособиях, а потом на задачах.

«Возьмите 15 палочек и разделите их на 5 равных частей. Сколько получится в каждой части?»

Это деление записывается на доске: 15 пал. : 5 = 3 пал. Пример читается так: «15 палочек разделить на 5 равных частей, будет 3 палочки (в каждой части)».

«Теперь возьмите ещё 15 палочек и разложите их на кучки (части), по 5 палочек в каждой части. Сколько частей получится?»

Решение записывается: 15 пал. : 5 пал. = 3 и читается: «15 палочек разделить по 5 палочек, получится 3 (части)».

Сравним оба эти примера на деление:

1) 15 пал. : 5 = 3 пал.;
2) 15 пал. : 5 пал. = 3.

Установим их сходство и различие.

Сходство. В обоих примерах делятся одни и те же числа и получается один и тот же результат. В обоих примерах мы говорим «разделить».

Разница. В первом примере мы делим 15 на 5 равных частей и узнаём, сколько палочек в одной части. Это деление на равные части. Во втором примере мы узнаём, сколько раз 5 палочек содержатся в 15 палочках. Это деление по содержанию.

УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ В ПРЕДЕЛЕ 100.

В пределе 100 нужно различать табличное и внетабличное умножение и деление. К табличному умножению и делению относятся все случаи умножения однозначных чисел, взятых по 2 с соответствующими случаями деления (6×8; 4×5; $48:6$; $35:7$ и т. д.). Они составляют таблицу умножения и деления в пределе 100. К внетабличным относятся случаи умножения двузначного числа на однозначное и однозначного на двузначное, когда произведение этих чисел не превышает 100, и все соответствующие им случаи деления.

Таблица умножения и деления.

Таблицы умножения и деления можно изучать по-разному: а) можно умножение и деление проходить раздельно, т. е. сначала изучить все случаи таблицы умножения и только после этого перейти к изучению таблицы деления; б) можно то и другое проходить совместно, т. е. изучив, например, случай умножения 5 на все числа первого десятка, изучить сейчас же и все случаи табличного деления на 5, и т. д. В нашей школе умножение и деление в пределе 100 проходится совместно, параллельно. При такой системе в сознании учащихся устанавливается тесная связь между этими взаимнообратными действиями, результаты деления находятся при помощи таблицы умножения.

На этой ступени учащиеся должны строго различать два вида деления. Опыт показал, что целесообразно вслед за умножением данного числа рассматривать сейчас же оба вида деления на данное число один за другим — сначала деление по содержанию, потом деление на равные части. Например, после изучения умножения 6 на числа первого десятка изучать деление на 6 сначала как деление по содержанию, а потом как деление на равные части (деление по 6 и деление на 6 равных частей). И тот и другой вид деления должен быть тесно связан с умножением: результат деления всегда находится при помощи таблицы умножения.

Например, требуется 30 разделить по 6. Чтобы найти частное, ставим вопрос: «Сколько раз надо взять по 6, чтобы получить 30? ($6\times x=30$)». Очевидно, 5 раз. Пятью шесть — тридцать. Следовательно, $30:6=5$.

Если же 30 делим на 6 равных частей, то для отыскания частного ставим вопрос так: «Какое число надо умножить на 6, чтобы получить 30? ($x\times6=30$)». Очевидно, таким числом будет 5, потому что шестью пять — тридцать.

Сущность каждого вида деления постигается детьми не столько на примерах, сколько на задачах. Поэтому в качестве мате-

риала для упражнений в усвоении таблицы деления нужно использовать в возможно большем количестве задачи. Смысл задачи должен подсказать ученику, с каким видом деления он имеет дело.

Например, пусть ученики решают задачу: «Колхозник продал 28 *кг* моркови 7 покупателям, каждому поровну. Сколько килограммов моркови купил каждый покупатель?» На вопрос: «Что нужно сделать, чтобы решить задачу», — ученик должен ответить: «Нужно 28 *кг* разделить на 7 равных частей (28 *кг* : 7 = 4 *кг*)».

Возьмём вторую задачу на деление: «Пешеход прошёл 28 *км*, проходя в час по 4 *км*. Сколько часов потребовалось пешеходу, чтобы пройти это расстояние?» Объясняя деление в данном случае, ученик должен сказать: «Пешеходу потребовалось столько часов, сколько раз 4 *км* повторится или содержится в 28 *км*. Чтобы узнать, сколько раз 4 *км* повторится в 28 *км*, нужно 28 *км* разделить по 4 *км* (28 *км* : 4 *км* = 7), 4 *км* содержатся в 28 *км* 7 раз. Следовательно, пешеходу потребуется 7 часов».

Таблицу умножения нужно изучать по постоянному множимому, т. е. сначала изучить таблицу умножения по 2, потом по 3, далее по 4 и т. д. Но пройдя так всю таблицу умножения, нужно её перегруппировать, расположить по постоянному множителю, т. е. повторить таблицу умножения на 2, на 3, на 4 и т. д.

При повторении нужно широко использовать способ краткого чтения таблицы, удобный для её запоминания; например, следующие случаи таблицы кратко читаются так:

$8 \times 2 = 16$	Дважды восемь — 16
$9 \times 3 = 27$	Трижды девять — 27
$7 \times 4 = 28$	Четырежды семь — 28
$9 \times 5 = 45$	Пятью девять — 45
$7 \times 7 = 49$	Семью семь — 49

И т. д.

При таком чтении множитель (дважды, трижды, пятью...) читается первым, хотя пишется он после множимого.

Основные приёмы табличного умножения.

Самый элементарный приём умножения — это набор равных слагаемых по одному с последующей заменой сложения умножением. Пусть, например, дети учатся умножать 7 на 6; 6 семёрок они набирают так: 7 да 7—14; 14 да 7—21; 21 да ещё 7—28; 28 да 7—35; 35 да ещё 7—42. Итак, если взять 6 раз по 7, получится 42. Записывая набор слагаемых по одной семёрке, получим:

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 42.$$

Заменяем сложение умножением и получаем такую запись:

$$7 \times 6 = 42.$$

Начав с этого приёма, надо показать учащимся и другой приём набора, приводящий к более быстрому получению результата:

набор слагаемых группами (применение распределительного закона умножения). Чтобы набрать 6 семёрок по этому способу, поступают так: набирают 3 семёрки и ещё 3 семёрки и полученные результаты складывают:

$$7 \times 3 = 21;\ 7 \times 3 = 21;\ 21 + 21 = 42;\ 7 \times 6 = 42.$$

Третий приём нахождения табличного результата — это перестановка сомножителей (применение переместительного свойства умножения). При изучении случая 8×5 ученики должны уметь набрать не только 5 восьмёрок, набирая их по одной или группами, но и должны знать, что при этом можно использовать переместительное свойство умножения, заменив этот случай равным ему 5×8, уже известным учащимся.

Наконец, при изучении умножения по 9 целесообразно использовать приём округления множимого, округляя 9 до 10. Вместо того чтобы набирать, например, 6 девяток, легче набрать 6 десятков и из 60 вычесть лишние 6 единиц.

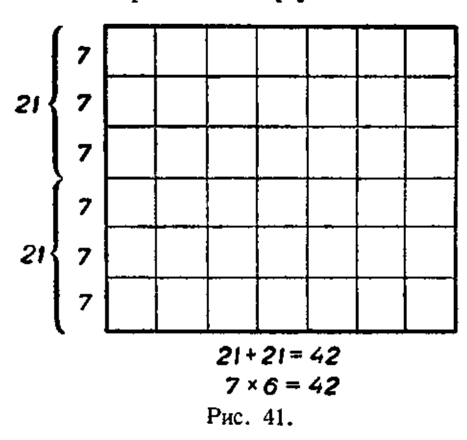


Рис. 41.

Кроме указанных, есть ещё и другие приёмы составления таблицы, однако обилием приёмов и разнообразием упражнений не нужно злоупотреблять.

Каждый приём надо конкретизировать на наглядных пособиях. Лучшими из них в данном случае являются: 1) прямоугольники, составленные из квадратиков, расположенных рядами, и 2) классные счёты. На прямоугольниках удобно показать набор равных слагаемых по одному и группами и использование переместительного свойства умножения; на классных счётах — набор равных слагаемых и приём округления.

Пусть нам нужно проиллюстрировать набор 6 семёрок. Для этого можно использовать прямоугольник с шестью рядами по семи клеток в каждом ряду (рис. 41):

То же можно проделать и на классных счётах (рис. 42).

Основные приёмы табличного деления.

Основной приём табличного деления — это приём, основанный на взаимосвязи умножения и деления: результат деления берётся из таблицы умножения. Например: при делении 36 на 4 получается 9, потому что четырежды 9—36. При делении 56 на 8 получается 7, потому что семью 8—56, и г. д.

Второй приём деления — последовательное деление. Например, чтобы разделить данное число на 4, достаточно разделить это число на 2, полученный результат ещё раз на 2.

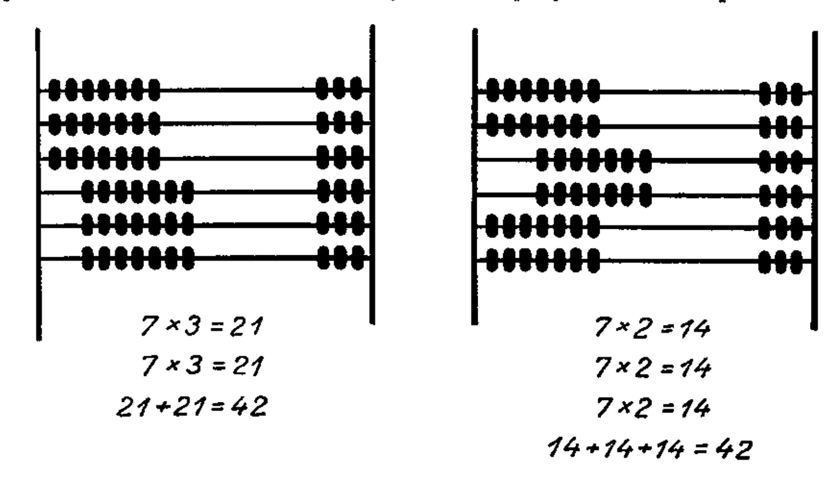


Рис. 42.

Чтобы разделить число на 6, достаточно разделить это число на 2 и полученный результат — на 3.

$$36 : 4 = (36 : 2) : 2 = 18 : 2 = 9$$
$$72 : 6 = (72 : 2) : 3 = 36 : 3 = 12$$

Из перечисленных приёмов предпочтение нужно отдать первому. Второй приём не всегда применим, так как он часто приводит к внетабличному делению, которое на этой ступени ученикам ещё незнакомо.

Уроки изучения таблицы умножения и деления.

Все уроки изучения таблицы умножения и деления могут быть построены по единому плану. Таблица умножения и деления каждого числа изучается на протяжении, примерно, 6 уроков; из них в течение первых двух уроков изучается таблица умножения данного числа; на последующих двух уроках развёртывается изучение таблицы деления по содержанию на данное число, на последних двух уроках изучается таблица деления на равные части (на данное же число).

Первый урок изучения таблицы умножения посвящается составлению с учащимися этой таблицы (с последующими краткими упражнениями в её усвоении); на втором уроке показывается приём сокращённого набора равных слагаемых и проводятся упражнения в усвоении таблицы на решении примеров и задач. Оба урока сопровождаются заданиями на дом — заучить наизусть составленную на уроке таблицу и решить определённое

количество примеров и задач с использованием данной таблицы умножения.

Первый из двух уроков изучения таблицы деления по содержанию посвящается составлению с учащимися данной таблицы, её чтению, записи и первым (кратким) упражнениям в её усвоении; на втором уроке проводятся упражнения в решении примеров и задач, на которых знание данной таблицы закрепляется. В домашнее задание включается решение примеров и задач, а также задание выучить наизусть составленную на уроке таблицу деления.

Два урока изучения таблицы деления на равные части строятся по аналогичной системе.

Первая половина таблицы умножения (умножение по 2, по 3, по 4 и по 5) изучается без использования переместительного свойства умножения; последнее вводится при изучении второй более трудной части таблицы умножения, начиная с таблицы умножения по 6.

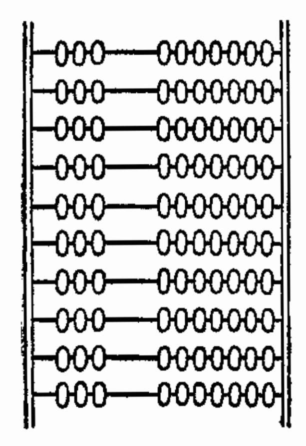


Рис. 43.

Покажем систему работы по изучению таблицы умножения и деления на примере табличного умножения и деления по 3.

1-й урок.

Цель урока. Составить с учащимися таблицу умножения по 3 и провести первые упражнения для её усвоения.

Ход урока.

1. Счёт тройками в пределе 30. «Будем считать тройками до 30». Учитель откладывает на счётах на каждой проволоке по 3 шарика; ученики считают: 3 да 3 — 6; 6 да 3 — 9; 9 да 3 — 12 и т. д.

Далее ведётся отвлечённый счёт тройками и с названием только одних результатов: 3, 6, 9, 12,..., 24, 27, 30. «Запишем результаты счёта тройками». Учитель на доске, а учащиеся в тетрадях записывают названные числа. Записанный ряд чисел несколько раз читается хором и в одиночку.

2. Запись присчитывания по тройке в виде сложения. Для сокращения времени учитель вывешивает заранее заготовленный плакат, на котором записано сложение троек:

$$
\begin{array}{l}
3 \\
3+3=6 \\
3+3+3=9 \\
3+3+3+3=12 \\
3+3+3+3+3=15 \\
3+3+3+3+3+3=18 \\
3+3+3+3+3+3+3=21 \\
3+3+3+3+3+3+3+3=24 \\
3+3+3+3+3+3+3+3+3=27 \\
3+3+3+3+3+3+3+3+3+3=30
\end{array}
$$

Плакат читается так: «Если сложить две тройки, получится 6. Если сложить 3 тройки, получится 9,... Если сложить 9 троек, получится 27. Если сложить 10 троек получится 30».

3. Запись таблицы умножения по 3. «Сложение троек заменим умножением тройки. Сложить 3 и 3 — это значит 3 взять 2 раза. Запишем это: $3 \times 2 = 6$. Сложить 3 тройки — это значит по 3 взять 3 раза, получится 9. Запишем это: $3 \times 3 = 9$». Рассуждая так и записывая один пример, за другим, получим таблицу умножения по 3:

$3 \times 1 = 3$	$3 \times 6 = 18$
$3 \times 2 = 6$	$3 \times 7 = 21$
$3 \times 3 = 9$	$3 \times 8 = 24$
$3 \times 4 = 12$	$3 \times 9 = 27$
$3 \times 5 = 15$	$3 \times 10 = 30$

4. Чтение таблицы, запись её в тетради учащихся и первые упражнения в её усвоении. Составленная таблица несколько раз читается хором и отдельными учениками, подряд и вразбивку, с открытыми результатами ($3 \times 9 = 27$) и с закрытыми ($3 \times 9 = ?$). При чтении таблицы меняется терминология: «по 3 взять 9 раз, получится 27», «3 умножить на 9, получится 27», «3 повторить 9 раз, получится 27».

Перед чтением таблицы учитель даёт детям установку на её запоминание: «Эту таблицу надо знать на память». «Читая, старайтесь её запомнить».

Далее учитель предлагает детям списать эту таблицу в свои тетради, снова напоминая им о необходимости знания таблицы наизусть.

В заключение проводятся упражнения в решении простых задач, в которых используется данная таблица. Например: «На одну рубашку требуется 3 *м* материи. Сколько метров материи потребуется на 4 рубашки? на 6 рубашек?» и т. д.

«Один чайник стоит 3 руб. Сколько стоят таких 7 чайников? 5 чайников? 8 чайников?» и т. д.

5. Задание на дом. Заучить таблицу умножения по 3, решить несколько простых и сложных примеров, а также одну-две задачи, в которых находят своё применение отдельные случаи данной таблицы.

2-й урок.

Цель урока. Познакомить детей с более простым и скорым способом нахождения результата табличного умножения (способом набора равных слагаемых группами). Провести упражнения в решении примеров и задач, на которых закрепляется знание таблицы умножения по 3.

Содержание урока.

1. Проверка домашнего задания: знания наизусть таблицы умножения по 3, правильности решения примеров и задач.

2. Объяснение того, как можно набирать равные слагаемые не по одному, а группами; упражнения в наборе равных слагаемых группами.

Решим пример: $3 \times 8 = ?$ «Как набрать 8 троек?» («Нужно к 3 прибавить 3, получится 6. К 6 прибавить третью тройку, получим 9. К девяти прибавим четвёртую тройку, получим 12. Так прибавляем по одной пятую, шестую, седьмую и восьмую тройку; в результате получаем 24».) Такой способ получения результата медленный, утомительный, при нём легко ошибиться. Нужно научиться набирать тройки не по одной, а сразу по несколько. 8 троек — это 4 тройки и ещё раз 4 тройки, т. е. 12, и ещё раз 12, а всего 24.

Как набрать более скорым способом 6 троек? 9 троек? 7 троек? и т. д. Такой счёт тройками иллюстрируется на классных счётах.

Ведя эти упражнения в системе и записывая их, получим таблицу:

$3 \times 2 = 6$	$3 \times 3 = 9$	$3 \times 5 = 15$
$3 \times 4 = 12$	$3 \times 6 = 18$	$3 \times 7 = 21$
$3 \times 8 = 24$	$3 \times 9 = 27$	$3 \times 10 = 30$

Полученная таблица несколько раз читается (с указанием связи одного случая таблицы с другим) и переписывается учащимися в свои тетради (с установкой на запоминание).

3. Решение одной-двух сложных (составных) задач, на которых достигаются две цели: расширение уменья решать задачи в 2—3 действия и закрепление знания таблицы умножения.

4. Самостоятельная работа учащихся: упражнение в решении примеров простых и сложных. Решение задачи, аналогичной тем, которые решались на данном или на предыдущих уроках. Проверка самостоятельной работы.

5. Задание на дом. Повторить таблицу умножения по 3, решить несколько (8—10) примеров и одну-две задачи. В задании должно быть предусмотрено и повторение ранее пройденного.

3-й урок.

Цель урока. Опираясь на таблицу умножения по 3, составить, таблицу деления по 3 (деление по содержанию) и провести первые упражнения для её усвоения.

Содержание урока.

1. Проверка домашнего задания. Один из способов фронтальной проверки: учитель диктует один за другим примеры из таблицы умножения, учащиеся пишут результаты. Проверка покажет степень усвоения таблицы каждым учеником в отдельности и классом в целом.

2. Составление таблицы деления по 3. Учитель составляет с учащимися таблицу деления по 3, исходя из таблицы умножения и опираясь на соответствующие зрительные образы, конкретизирующие деление по содержанию.

Первые 6 случаев таблицы как повторение опираются только на таблицу умножения:

$3 \times 2 = 6$ $6 : 3 = 2$	$3 \times 3 = 9$ $9 : 3 = 3$	$3 \times 4 = 12$ $12 : 3 = 4$
$3 \times 5 = 15$ $15 : 3 = 5$	$3 \times 6 = 18$ $8 : 3 = 6$	$3 \times 1 = 3$ $3 : 3 = 1$

Рассуждение: «по 3 взять 2 раза, получится 6. Значит, если 6 разделить по 3, получится 2» (2 раза по 3).

Следующие 4 случая таблицы деления (21 : 3; 24 : 3; 27 : 3; 30 : 3) — новые для учащихся и более трудные — иллюстрируются на делении кружочков следующим образом.

000 000 000 000 000 000 000 — 21 : 3 = 7

000 000 000 000 000 000 000 000 — 24 : 3 = 8

000 000 000 000 000 000 000 000 000 — 27 : 3 = 9

000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 — 30 : 3 = 10

После такого конкретного показа и эти случаи деления связываются с таблицей умножения:

$3 \times 7 = 21$ $21 : 3 = 7$	$3 \times 8 = 24$ $24 : 3 = 8$	$3 \times 9 = 27$ $27 : 3 = 9$	$3 \times 10 = 30$ $30 : 3 = 10$

3. Чтение таблицы, списывание её в тетради и первые упражнения в её усвоении. Составленная таблица несколько раз читается учащимися (с установкой на её запоминание): хором и в одиночку, подряд и вразбивку, с открытыми и закрытыми ответами, с разными способами чтения (первый основной способ: «6 разделить по 3, получится 2»; второй способ чтения: «3 содержится в 6 2 раза»; «3 содержится в 9 3 раза». И т. д.

Далее дети списывают составленную таблицу деления в свои тетради.

$$6 : 3 = 2 \quad 15 : 3 = 5 \quad 24 : 3 = 8$$
$$9 : 3 = 3 \quad 18 : 3 = 6 \quad 27 : 3 = 9$$
$$12 : 3 = 4 \quad 21 : 3 = 7 \quad 30 : 3 = 10$$

В заключение этой части урока решается несколько простых задач, в которых встречается деление по 3. Например: «В банку помещается 3 *кг* мёда. Сколько нужно иметь банок, чтобы поместить 21 *кг* мёда? 27 *кг* мёда? 18 *кг*? 24 *кг*?»

4. Подготовка учащихся к выполнению домашнего задания. Задание на дом: усвоить наизусть таблицу деления по 3, решить определённое количество примеров (8—10) и задачу на деление по содержанию.

4-й урок.

Цель урока. Провести упражнения в решении примеров и задач для закрепления знания таблицы деления по 3.

Содержание урока.

1. Проверка домашнего задания — знание наизусть таблицы деления по 3 и правильности решения примеров и задач. Проверка знания таблицы деления может быть проведена аналогично проверке знания таблицы умножения (см. 2-й урок). При проверке решения задачи обращается внимание как на правильность хода решения, так и на правильность записи деления по содержанию.

2. Упражнения в решении задач (примерно двух) на деление по содержанию. Задачи подвергаются разбору аналитико-синтетическим методом, составляется устно план решения; решение задачи записывается на доске и одновременно в тетрадях учащихся. Упражнение в составлении своих задач на деление по содержанию. Подготовка учащихся к самостоятельной работе. Решение нескольких сложных примеров, в которые входит деление по содержанию.

3. Самостоятельная работа учащихся: решение примеров на деление по содержанию и одной задачи (по задачнику). Возможно задание — самостоятельно составить такую задачу, которая решалась бы делением по содержанию.

4. Подготовка учащихся к выполнению домашнего задания. Задание на дом — повторить таблицу деления по 3, решить 8—10 примеров (на деление по содержанию и на повторение пройденного) и задачу на деление по содержанию.

5-й урок.

Цель урока. Повторить таблицу умножения на 3 и, исходя из неё, составить таблицу деления на 3 равные части и провести первое упражнение для её усвоения.

Содержание урока.

1. Проверка домашнего задания.

2. Повторить с учащимися таблицу умножения на 3, дополнив её тремя новыми случаями (7×3; 8×3; 9×3) и затем, опираясь на эту таблицу,

составить таблицу деления на 3 равные части. В результате получатся записанными на доске следующие две таблицы:

1 × 3 = 3	3 : 3 = 1
2 × 3 = 6	6 : 3 = 2
3 × 3 = 9	9 : 3 = 3
4 × 3 = 12	12 : 3 = 4
5 × 3 = 15	15 : 3 = 5
6 × 3 = 18	18 : 3 = 6
7 × 3 = 21	21 : 3 = 7
8 × 3 = 24	24 : 3 = 8
9 × 3 = 27	27 : 3 = 9
10 × 3 = 30	30 : 3 = 10

В таблицу умножения включаются, как сказано выше, 3 новых случая. Усвоение этих случаев не составит для учащихся какой-либо трудности, так как они сводятся к присчитыванию одной семёрки к 14, одной восьмёрки к 16 и одной девятки к 18. При чтении и усвоении этой таблицы можно применить краткий способ чтения: трижды четыре, трижды пять, трижды шесть...

Каждый случай таблицы деления выводится из соответствующего случая таблицы умножения; например: «По 5 взять 3 раза, получится 15; значит, если 15 разделить на 3 равные части, то получим по 5 (в каждой части)». Составленная таблица читается несколько раз.

Таблица деления в данном случае читается так: «3 разделить на 3 равные части, получится по одному; 6 разделить на 3 равные части, получится по 2» и т. д Полезно при чтении таблицы закрыть полоской бумаги все делимые и ставить вопросы так: «Какое число нужно разделить на 3, чтобы получить 7?»

Деление на 3 равные части иллюстрируется путём деления отрезка определённой длины, например: отрезок длиной в 27 *см* разделить на 3 равные части.

3. Списывание таблицы деления учащимися в свои тетради (с установкой на запоминание).

Решение нескольких простых задач на деление на 3 равные части. Например: «Бревно длиной в 24 *м* распилили на 3 равные части. По сколько метров получилось в каждой части?» «В детский сад доставили 27 *л* молока. Третью часть этого молока израсходовали на завтрак. Сколько литров молока израсходовали на завтрак?»

4. Подготовка учащихся к выполнению домашнего задания. Домашнее задание — выучить наизусть таблицу деления на 3 равные части, решить данное количество примеров на деление на 3 равные части и задачу.

6-й урок.

Цель урока. Провести упражнение в решении примеров и задач на деление на равные части и тем самым добиться твёрдого знания таблицы деления на 3 равные части.

Содержание урока.

1. Проверка домашнего задания — знания наизусть таблицы деления на 3 равные части, правильности решения примеров и задачи.

2. Упражнение в устном счёте на примерах, в которые включаются сложение и вычитание в пределе 100, умножение и деление в пределах пройденного.

3. Решение двух сложных задач на деление на равные части, с разбором каждой задачи, составлением плана решения и записи решения (по крайней мере, одной задачи).

4. Упражнение в придумывании учащимися своих задач: одной простой задачи на деление на равные части и одной простой задачи на деление по содержанию.

5. Самостоятельная работа учащихся: упражнение в решении сложных примеров на деление на 3 совместно с другими действиями (примеры типа: $9 \times 2 : 3$; $(3 \times 8) + (21 : 3)$). Проверка самостоятельной работы.

6. Подготовка учащихся к выполнению домашнего задания. Домашнее задание — повторить таблицу умножения и деления на 3. Решить 8—10 примеров и одну задачу на деление, с включением материала из ранее пройденного.

Переместительное свойство умножения.

С переместительным свойством умножения целесообразно познакомить учащихся тогда, когда они приступают к изучению наиболее трудной части таблицы умножения, начиная с умножения числа 6. Это свойство нужно показать наглядно, сформулировать его (не употребляя при этом термин «переместительное свойство») и показать его практическое применение.

Цель урока, на котором объясняется это свойство, можно сформулировать перед учащимися так: «Посмотрим, меняется ли результат умножения от перестановки чисел».

Объяснение этого свойства можно провести либо при помощи прямоугольника, разделённого на клетки, либо при помощи подсчёта нарисованных на доске палочек (рис. 44).

Рис. 44.

Учитель: Подсчитаем, сколько здесь нарисовано палочек. Считайте рядами.

Ученик: Здесь 3 ряда палочек, в каждом по 6 палочек. 3 раза по 6, будет 18.

Учитель: «Запишем это: 6 пал.$\times$3 = 18 пал. Теперь подсчитайте палочки столбиками».

Ученик: «Здесь 6 столбиков, и в каждом по 3 палочки. 6 раз по 3, будет 18».

Учитель: «Запишем эти вычисления так: 3 пал.$\times$6=18 пал. Как ни считали, а получается одинаковое число палочек — 18. Выходит, 6×3 всё равно, что 3×6. Запишем это так: $6 \times 3 = 3 \times 6$. Прочитаем эту запись так: 6 умножить на 3, всё равно, что 3 умножить на 6. Теперь сравните эти два примера:

1) $6 \times 3 = 18$
2) $3 \times 6 = 18$

и скажите, что в них сходного и чем они отличаются один от другого».

Ученик: «Эти примеры сходны тем, что в них одинаковые числа — 6, 3, 18. Отличаются они порядком чисел: в первом примере сначала поставили число 6, а потом число 3; во втором примере наоборот».

Учитель: «Изменился ли результат от того, что мы во втором примере переставили числа одно на место другого?»

Ученик: «Результат от перестановки чисел не изменился».

Далее ученики самостоятельно выполняют задание: нарисовать в тетрадях кружочки так, как они нарисованы на доске:

0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0

и подсчитать их сначала рядами, потом столбиками. Каждое вычисление записать. Записи сравнить.

После выполнения этого задания делается вывод: *при умножении числа можно переставлять одно на место другого; результат от этого не меняется.*

Вывод несколько раз повторяется учащимися:

Учитель: «Этим свойством умножения мы и будем пользоваться: оно часто облегчает вычисления. Например: что легче и скорее набрать: 8 двоек или 2 восьмёрки? 6 троек или 3 шестёрки? 10 пятёрок или 5 десятков?».

Ученики на каждый из этих вопросов дают ответ.

В заключение ученикам предлагается решить несколько примеров с помощью перестановки чисел; например:

$$2 \times 8 = 8 \times 2 = 16$$
$$2 \times 9 = 9 \times ? =$$
$$4 \times 6 = ? \times 6 =$$
$$5 \times 8 = ? \times ? =$$

В дальнейшем учащимся предлагается решить на основании переместительного свойства несколько задач. Например:

1) «На участке надо посадить рядами 36 яблонь. Как это можно сделать? Показать на рисунке.

2) Надо построить в колонну 24 ученика. Сделайте это разными способами (на основании знания таблицы умножения) и покажите на рисунке. Каждого ученика обозначайте точкой».

1)
. . . .
. . . .
. . . .
$8 \times 3 = 24$

2)
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
$6 \times 4 = 24$

3)
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
$4 \times 6 = 24$

4)
. . .
. . .
. . .
. . .
. . .
. . .
. . .
. . .
$3 \times 8 = 24$

Нахождение части числа.

В связи с изучением таблицы деления учащиеся приобретают уменье находить часть числа — вторую (или половину), третью, четвёртую, пятую, шестую, седьмую, восьмую, девятую. Здесь речь пока идёт не о долях единицы, не о дробном числе как таковом (доли единицы во втором классе не изучаются), а только об уменье найти ту или иную часть данного числа. Здесь ученик узнаёт, что заданная часть числа находится путём *деления* данного (целого) числа на равные части, что в результате деления получается столько равных частей, на сколько производилось деление, что каждая из этих частей носит название в зависимости от делителя; так, если целое разделили на 6 равных частей, то каждая полученная часть является *одной шестой* частью числа, и, наоборот, чтобы получить *шестую* часть числа, надо разделить данное число на шесть равных частей и взять одну такую часть.

Понятие о части числа и способе её нахождения, как и всякое новое для ученика понятие, даётся наглядно, конкретно, на делении круга и прямой линии на несколько равных частей. При таком делении учащиеся увидят целое и его части, заметят, что целое состоит из определённого количества равных частей и что все эти части носят определённое название.

Нахождению части числа нужно отвести специальный урок перед тем, как приступить к изучению таблицы умножения и деления. На этом уроке можно ознакомить учащихся с нахождением половины числа (повторение), четвёртой и восьмой части. На последующих уроках, в связи с изучением таблицы деления на 3 ученики ознакомятся с нахождением одной трети числа, в связи с делением на 5 ознакомятся с нахождением одной пятой числа и т. д.

Урок, на котором учащиеся знакомятся с нахождением половины, четверти и восьмой части числа, развёртывается по следующему плану.

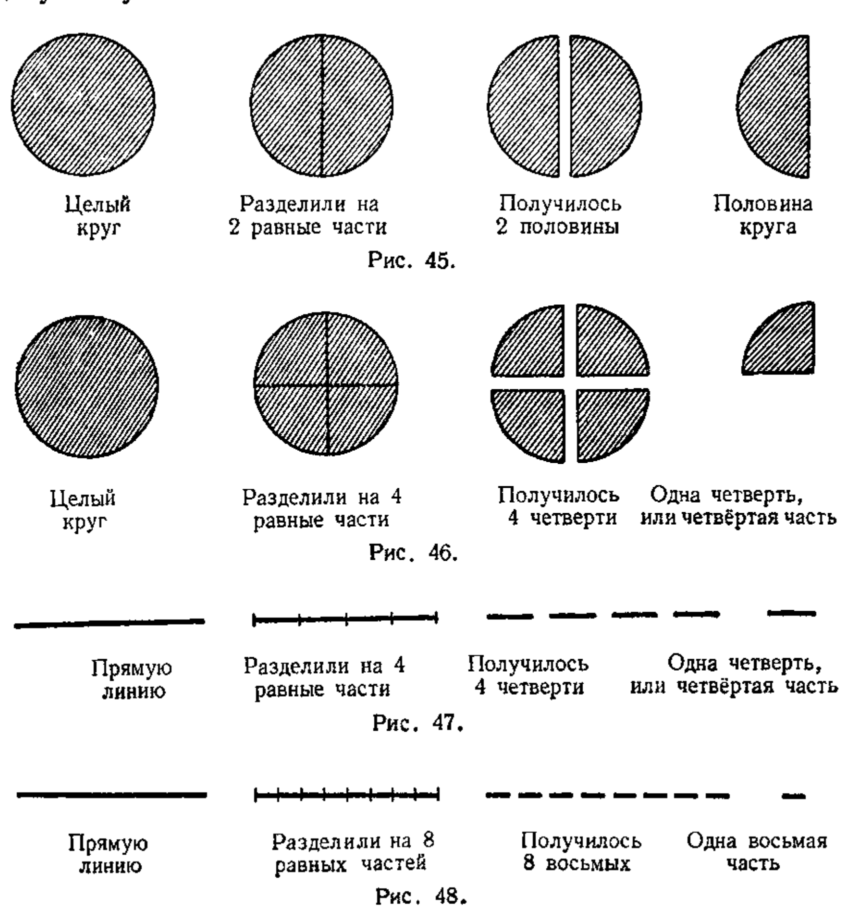


Рис. 45.

Рис. 46.

Рис. 47.

Рис. 48.

Что надо сделать, чтобы получить: четвёртую часть круга? половину линии? восьмую часть круга?

Верёвку разрезали на 4 равные части и взяли одну часть для упаковки книг. Какую часть верёвки взяли?

За обедом один хлеб разрезали на 8 равных кусков и дали каждому обедавшему по одному куску. Какую часть хлеба получил каждый обедавший?

40 перьев разложили поровну в 4 коробки. Сколько перьев лежит в каждой коробке?

Какая часть перьев лежит в каждой коробке?

16 *кг* картофеля израсходовали поровну в 8 дней. По сколько килограммов расходовали каждый день?

Какую часть картофеля расходовали ежедневно?

Увеличение числа в несколько раз.

Изучение этого вопроса расширяет у детей понятие об умножении. Учащиеся узнают, что умножение применяется в двух случаях: а) когда нужно данное число повторить слагаемым несколько раз и б) когда нужно данное число увеличить в несколько раз.

Формирование понятия об увеличении числа в несколько раз складывается из двух моментов: сначала дети образуют новое число, которое во столько-то раз больше данного числа (например, положить на верхнюю полку 5 книг, а на нижнюю — в 4 раза больше; начертить одну линию длиной в 8 *см*, а другую — в 2 раза длиннее и т. д.), а затем данное число увеличивают в несколько раз. Сущность вопроса при этом остаётся той же, но выражается она разными терминами, с которыми учащиеся должны освоиться.

Формирование данного понятия занимает, примерно, 5 уроков, идущих в такой последовательности:

На первом уроке учащимся даётся первоначальное понятие об увеличении числа в несколько раз на наглядных пособиях.

На втором уроке это понятие углубляется путём решения простых задач, в которых искомое число должно быть в несколько раз больше данного. На этом же уроке показывается, что термины «дороже, тяжелее, длиннее выше, шире в несколько раз» имеют значение термина «больше в несколько раз».

На третьем уроке понятие об увеличении в несколько раз закрепляется на решении сложных задач — в 2—3 действия.

На четвёртом уроке понятие об увеличении числа в несколько раз сопоставляется на решении примеров и задач с ранее усвоенным учащимся понятием об увеличении числа на несколько единиц.

На пятом уроке изучаемое понятие закрепляется на решении сложных задач, в которых учащиеся встречаются с увеличением числа в несколько раз и на несколько единиц.

В качестве наглядных пособий используются классные счёты, палочки, картонные кружочки и др. Кроме того, отдельные моменты формируемого понятия полезно в самом начале проиллюстрировать на самих детях. Поставьте перед классом с левой стороны двух учащихся, а с правой стороны 3 раза по 2 учащихся и ска-

жите, что на правой стороне в 3 раза больше учащихся, чем на левой стороне.

Проиллюстрируйте это положение на другом количестве учащихся: справа 3 ученика, слева 4 раза по 3 — в 4 раза больше; справа 4 ученика, а слева 2 раза по 4 ученика — в 2 раза больше.

На этих живых примерах дети получат первое яркое представление о тех количественных отношениях, которые служат в данном случае предметом изучения, и понимание выражения «во столько-то раз больше».

После объяснения выражения «во столько-то раз больше» на демонстрации учащихся учитель поясняет это на классных счётах.

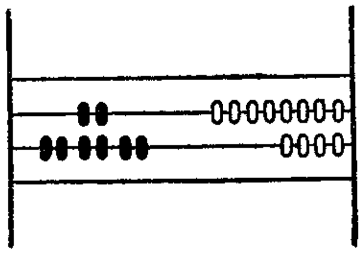


Рис. 49.

Учитель кладёт по 2 шарика на двух проволоках классных счётов.

«Сколько шариков положено на верхней проволоке? На нижней? Что можно сказать о числе шариков?» (Шариков положено поровну.) Затем учитель сбрасывает эти шарики и откладывает на верхней проволоке 2 шарика, а на нижней 3 пары шариков, оставляя между парами промежутки (рис. 49).

«Сколько шариков отложено на верхней проволоке?» (2.) «На нижней?» (6.) «Поровну ли шариков на верхней и на нижней проволоках?» (Нет, на нижней проволоке шариков больше.)

«Да, на нижней проволоке шариков больше. На нижней проволоке шариков столько же, сколько на верхней, да ещё столько, да ещё столько; 3 раза по столько. На нижней проволоке шариков в 3 раза больше, чем на верхней».

«Сколько палочек я написал?» (Учитель пишет на доске две палочки.)

«А теперь нужно во втором ряду написать палочек в 4 раза больше. Что это значит?» (Столько, столько, ещё столько да ещё столько — 4 раза по две палочки.) Учитель пишет 4 пары палочек.

Учитель кладёт 3 кубика. «Сколько кубиков положил я? А вы положите в 2 раза больше кубиков. Что это значит?» (Столько же да ещё столько, 2 раза по 3 кубика.)

«Вместо того, чтобы сказать «в 2 раза больше», говорят также «вдвое больше»; вместо «в 3 раза больше», говорят «втрое больше». На нижней проволоке отложено шариков в 2 раза больше. Как сказать это по-другому?» (Вдвое больше.)

«Слева отложено 2 кубика, а справа в 3 раза больше. Как это сказать по-другому?» (Справа кубиков втрое больше.)

«На одной строчке написано 5 букв, а на другой — в 4 раза больше. Скажите это иначе». (На другой строчке букв вчетверо больше.) «Учитель дал одному ученику 2 тетради, а другому в 3 раза больше. Что это значит: в 3 раза больше?» (Это значит, что другой ученик получил 3 раза по две тетради.) «Сколько же тетрадей дал учитель другому ученику? Как это узнать?» (Надо 2 повторить 3 раза. Получится 6.)

«Запишем это: 2 тетр. $\times$ 3 = 6 тетр.».

«Решим вторую задачу: «В одной квартире живёт 5 человек, а в другой в 4 раза больше. Сколько человек живёт в другой квартире?» «Что значит: в 4 раза больше?» (Это значит, что в другой квартире живёт 4 раза по 5.)

«Как же узнать, сколько человек живёт в другой квартире?» (Нужно 5 умножить на 4, получится 20.)

«Запишите это решение: 5 чел. $\times 4 = 20$ чел.

4 возьмите 6 раз. Сколько получится? Что больше: 4 или 24?

Значит, когда мы вместо 4 взяли 24, мы увеличили число 4. Так что же мы сделали с числом 4?» (Мы увеличили число 4.) «Сколько раз мы взяли по 4? Во сколько же раз мы увеличили число 4? Как же увеличить число 4 в 6 раз?» (Нужно 4 умножить на 6.) «Увеличьте 3 в 7 раз. Сколько будет? Как вы это сделали? Увеличьте 2 в 8 раз. Увеличьте 5 втрое, вчетверо» и т. д.

Вывод: Чтобы данное число увеличить в несколько раз, надо его умножить.

Уменьшение числа в несколько раз.

Понятие уменьшения числа в несколько раз тесно связано с понятием части числа. В самом деле, уменьшить число в несколько раз — значит найти ту или иную часть этого числа; так, уменьшить число в 5 раз — значит найти пятую часть этого числа; уменьшить число в 8 раз — значит найти восьмую часть числа и т. д. И наоборот, найти ту или иную часть данного числа — значит уменьшить это число в несколько раз; так, найти четвёртую часть какого-либо числа — значит уменьшить это число в 4 раза. Взаимосвязь между уменьшением числа в несколько раз и нахождением части числа и должна быть показана учащимся. При этом необходимо опереться на нахождение части числа, которое уже знакомо учащимся, и на понимание детьми соотношения между целым и его частью: часть всегда меньше целого.

Путь выяснения на конкретном примере понятия «уменьшить число в несколько раз» будет таков:

Откладываем на проволоке классных счётов 8 косточек. Даём задание — найти четвёртую часть восьми. Ученики делят 8 на 4 равные части и, получив в каждой части по 2 косточки, откладывают 2 косточки на другой проволоке. 2 составляет четвёртую часть 8.

Какое число меньше — 8 или 2? — 2 меньше 8, 2 — только четвёртая часть 8. Чтобы получить 2, число 8 мы разделили на 4 части, иначе говоря, число 8 мы уменьшили в 4 раза. Разумеется, что новые для ученика термины «уменьшили в 4 раза» сообщаются самим учителем.

Формирование понятия «уменьшить число в несколько раз» занимает, примерно, 4 урока.

На первом уроке даётся первоначальное понятие об уменьшении числа в несколько раз и делается вывод о том, что уменьшение числа в несколько раз выполняется делением.

На втором уроке понятие уменьшения числа в несколько раз углубляется путём решения задач в 1—2 действия.

На третьем уроке уменьшение числа в несколько раз сопоставляется с уменьшением числа на несколько единиц.

На четвёртом уроке понятие уменьшения числа в несколько раз закрепляется на решении сложных задач, в которых встречается уменьшение и увеличение числа в несколько раз, уменьшение числа в несколько раз и на несколько единиц.

Первый урок развёртывается по следующему плану.

На верхней проволоке классных счётов учитель кладёт 3 шарика, на следующей нижней 2 раза по 3 шарика.

«Сколько шариков положено на верхней проволоке? Сколько на нижней? На какой проволоке положено шариков меньше?».

«На сколько равных частей разделены те шарики, что положены на

нижней проволоке?» (На две равные части, пополам.) «По сколько шариков в каждой части? Итак: на верхней проволоке только половина тех шариков, которые лежат на нижней проволоке. На верхней проволоке шариков в 2 раза меньше.

Я поставил на одну планку 10 кубиков. А на другую планку нужно поставить кубиков в 2 раза меньше. Что значит — в 2 раза меньше?» (Значит, половину 10 кубиков.) «10 кубиков разделить пополам — сколько будет в каждой части?» (Кубики раздвигаются.) «Сколько же кубиков надо поставить на другую планку?»

Учитель пишет на доске 6 палочек. «Сколько палочек написал я? Во втором ряду нужно написать палочек втрое меньше; что значит втрое меньше? Какую часть 6 я должен написать во втором ряду?» (Третью часть.) «Что надо сделать, чтобы найти третью часть 6?» (Надо 6 разделить на три равные части — будет 2.)

Учитель делит 6 палочек на 3 равные части, ставя чёрточки между частями. «Сколько же палочек надо написать во втором ряду?»

«Мальчик нашёл под одной яблоней 10 яблок, а под другой — в 5 раз меньше. Что значит: в 5 раз меньше?» (Пятую часть.) «Как узнать, сколько яблок нашёл мальчик под другой яблоней?» (Надо 10 разделить на 5 равных частей.) «Запишем это: 10 ябл. : 5 = 2 ябл.».

«На грузовик положили 27 мешков муки, а на подводу в 3 раза меньше. Сколько мешков положили на подводу? Как это узнать? (Надо 27 разделить на 3 равные части — будет 9.) Запишем решение: 27 меш : 3 = 9 меш.».

«12 разделить на две равные части — сколько будет? Что меньше — 6 или 12?»

«Значит, когда мы вместо 12 получили 6, то мы уменьшили число 12. Что же мы сделали с числом 12? Во сколько раз мы уменьшили 12? Как же уменьшить 12 в 2 раза?» (Надо 12 разделить на 2 равные части, пополам.)

«Уменьшить 20 в 4 раза. Сколько получится? Как вы это сделали? Уменьшите 32 в 8 раз, 40 в 5 раз» и т. д.

Вывод: Чтобы данное число уменьшить в несколько раз, надо его разделить.

КРАТНОЕ СРАВНЕНИЕ.

Среди количественных отношений, изучаемых в арифметике, большое значение имеет кратное отношение.

Оно возникает тогда, когда ставится вопрос о сравнении двух однородных величин или двух чисел: во сколько раз одно число больше или меньше другого.

Кратное отношение, или, иначе говоря, кратное сравнение, является одним из важнейших понятий математики. Формирование этого понятия начинается рано — уже во II классе в связи с изучением табличного деления. Путём решения различных задач на кратное сравнение у детей постепенно накапливаются конкретные представления, которые в дальнейшем (в V и VI классах) будут обобщены в понятие «отношение».

Во II классе, где даётся первоначальное знакомство с этим понятием, дети должны осознать сущность кратного сравнения, которое в конечном счёте сводится к определению того, сколько раз одно число содержится в другом числе, и усвоить, что ответ на вопрос, во сколько раз одно число больше или меньше другого, находится посредством деления. Таким образом, на решении

этих задач расширяется смысл деления, деление приобретает для детей новое значение.

Методика формирования этого понятия та же, что и формирования других математических понятий, а именно: сначала оно выясняется на наглядных пособиях; затем оно конкретизируется и осмысливается на решении задач, сначала простых, а потом и сложных (составных); далее характерные особенности кратного сравнения подчёркиваются путём сопоставления его с разностным сравнением и путём решения задач, в которых встречается и разностное и кратное сравнение чисел; наконец, это понятие используется для решения близких детям практических вопросов.



Рис. 50.

В результате рассмотрения отношения между совокупностями предметов устанавливается и формулируется правило, запоминаемое детьми:

«Чтобы узнать, во сколько раз одно число больше или меньше другого, нужно одно число разделить на другое».

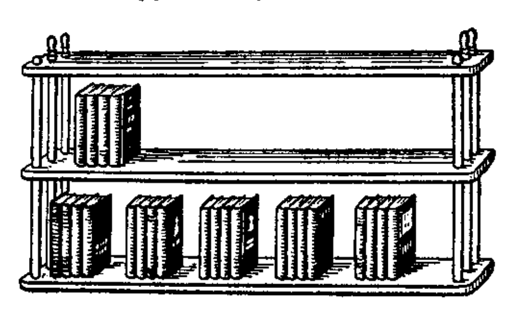


Рис. 51.

В ходе объяснения этого нового для детей понятия особенно ответственным является тот момент, когда устанавливается, что для получения ответа на вопрос, во сколько раз одна совокупность предметов больше другой, надо большую совокупность представить расчленённой (разделённой) на части, равные меньшей совокупности.

Если даны 24 кружочка в виде сплошного ряда, то трудно сказать, во сколько раз они больше трёх кружочков, но стоит разделить эти 24 кружочка по 3 кружочка, как сразу станет ясно, что 24 кружочка больше трёх кружочков в 8 раз, так как 24 состоит из 8 троек.

Чтобы этот момент был убедительным для детей, ему должны предшествовать кратные сравнения таких двух совокупностей, из которых большая уже даётся расчленённой на малые совокупности. «Справа нарисовано 2 ёлочки, а слева 7 раз по две ёлочки, т. е. 14 ёлочек. Во сколько раз 14 ёлочек больше двух?» (рис. 50).

«На верхней полке лежит 4 книги, а на нижней 5 раз по 4 кни-

ги, т. е. 20 книг. Во сколько раз на нижней полке больше книг, чем на верхней?» (рис. 51).

«Почему в этих примерах легко давать ответ на вопрос: во сколько раз больше..?» (Потому что 20 книг мы показали разделёнными по 4 книги; 12 ёлочек мы изобразили разделёнными по 2 ёлочки.)

«А вот можно ли так же легко и сразу сказать, во сколько раз 24 кружочка больше 6 кружочков, если они нарисованы так:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0

Очевидно, нет. Что надо сделать, чтобы было ясно, во сколько же раз 24 кружочка больше, чем 6 кружочков?

Для этого нужно 24 кружочка разделить по 6 кружочков

000000 000000 000000 000000
000000

Вот теперь хорошо видно, что 24 кружочка больше 6 кружочков в 4 раза».

Так учащиеся подводятся к пониманию того, что вопрос «во сколько раз одно число больше другого» решается делением.

Первоначальное объяснение этого понятия даётся, примерно, в следующем плане.

На одной проволоке классных счётов кладётся 2 шарика, на другой 6 шариков парами.

«Сколько шариков на верхней проволоке? Сколько на нижней? Где шариков больше?

Во сколько раз на нижней проволоке шариков больше, чем на верхней?

На верхней проволоке одна пара, а на нижней 3 пары, значит, на нижней проволоке в 3 раза больше, чем на верхней.

Во сколько раз 6 шариков больше двух шариков?

2 шарика во сколько раз меньше 6 шариков?

Слева нарисовано 3 ёлочки, а справа 4 раза по 3 ёлочки, или 12 ёлочек.

Во сколько раз 12 ёлочек больше трех ёлочек?

3 ёлочки во сколько раз меньше 12 ёлочек?

Отложим на верхней проволоке 2 шарика, на нижней 10 шариков. (Учитель откладывает 10 шариков сплошным рядом.)

Во сколько раз 10 шариков больше двух шариков? Что надо сделать, чтобы было хорошо видно, что 10 больше двух в 5 раз?

Почему мы могли сразу сказать, что 12 ёлочек больше трёх ёлочек в 4 раза? что 6 шариков больше двух шариков в 3 раза?» (Потому что 12 ёлочек были разделены по 3 ёлочки, 6 шариков были расставлены по 2 шарика).

«Так что же нужно сделать с 10 шариками, чтобы было видно, во сколько раз они больше двух шариков? (Нужно 10 шариков расставить или разделить по 2 шарика или парами.)

«Во сколько раз 10 больше двух?

2 во сколько раз меньше 10?

Нарисуем на верхней линейке 20 кружочков, на нижней 5 кружочков.

Во сколько раз 20 кружочков больше 5 кружочков?

Что нужно сделать, чтобы ответить на этот вопрос?» (Нужно 20 кружочков разделить по 5 кружочков.)

«Сколько получится пятерок? Значит, во сколько раз 20 кружочков больше 5 кружочков?

Запишем это так: 20 кр. : 5 кр. = 4. Прочитайте эту запись: 20 кружочков больше 5 кружочков в 4 раза. Прочитайте по-другому (20 кружочков разделить по 5 кружочков, будет 4).

У меня в левой руке 6 карандашей, а в правой 18 карандашей. Во сколько раз у меня в правой руке больше карандашей, чем в левой? Что нужно сделать, чтобы ответить на этот вопрос? Разделить 18 по 6, сколько получится? Значит, во сколько раз 18 больше 6? Запишите, что 18 больше 6 в 3 раза.

18 к. : 6 к. = 3.

Нарисуйте у себя в тетрадях сверху 12 кружочков, а под ними 4 кружочка. А дальше покажите, во сколько раз 12 кружочков больше 4 кружочков и запишите то действие, которое вы сделали, чтобы узнать, во сколько раз 12 больше 4». (Учитель на доске, а ученики в тетрадях выполняют это задание.)

000000000000 0000	0000 0000 0000 0000	12 : 4 = 3

Ответ формулируется устно: 12 кружочков больше 4 кружочков в 3 раза. 4 кружочка меньше 12 кружочков в 3 раза.

З а д а ч а. «Девочка нашла под берёзой 9 грибов, а под ёлкой 3 гриба. Во сколько раз больше грибов нашла девочка под берёзой, чем под ёлкой?»

Решение задачи объясняется и записывается.

О б о б щ е н и е. Ч т о б ы у з н а т ь, в о с к о л ь к о р а з о д н о ч и с л о б о л ь ш е и л и м е н ь ш е д р у г о г о, н а д о б о л ь ш е е ч и с л о р а з д е л и т ь н а м е н ь ш е е.

В заключение работы над этой темой учащимся предлагается самим составлять такие задачи, в которых требуется узнать, во сколько раз одно число больше другого, а также сравнивать в кратном отношении величины предметов, находящихся в классе: узнать, во сколько раз ручка длиннее пера; во сколько раз высота двери больше её ширины; во сколько раз длина доски больше её ширины, длина одного отрезка больше длины другого и т. д.

Учитель подбирает такие предметы, размеры которых находятся в кратном отношении.

ОБЪЕДИНЕНИЕ ОБОИХ ВИДОВ ДЕЛЕНИЯ.

Изучение таблицы деления нужно закончить объединением обоих видов деления — деления на равные части и деления по содержанию — в единое понятие деления.

Для этого решается пара примеров:

40 : 5 =
36 : 9 =

Каждый из них решается сначала как деление на равные части (40 разделить на 5 равных частей, получится по 8), а затем как деление по содержанию (40 разделить по 5, получится 8 раз по 5).

Обращается внимание учащихся на одинаковые результаты: делим ли мы число на равные части или по содержанию, всё равно в результате получается одно и то же число. Поэтому, когда решаются примеры на деление, можно не различать, какое это деление, и читать примеры так: 40 разделить на 5, получится 8; 36 разделить на 9, получится 4

Но если это для нас выгодно, можно и различать вид деления. Например, пусть дано решить пример — 80 : 40. Тут легче узнать, сколько раз 40 содержится в 80, чем 80 делить на 40 равных частей. Зато когда делится 80 на 4, легче 80 делить на 4 равные части, чем узнавать, сколько четвёрок в 80.

Значит, при решении примеров можно или совсем не думать о том, какое это деление, или пользоваться то тем, то другим видом деления в зависимости от того, какие даны числа.

Но при решении з а д а ч на деление надо строго различать, какое деление применяется при решении данной задачи — деление на равные части или деление по содержанию. Это различение нужно для того, чтобы, решая задачу, правильно рассуждать и правильно записывать решение. Деление на равные части и деление по содержанию при решении задач записывается неодинаково.

ВНЕТАБЛИЧНОЕ УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ.

По своему характеру изучение в н е т а б л и ч н о г о умножения и деления отличается от изучения т а б л и ч н о г о умножения и деления: в последнем все результаты вычислений усваивались на память, здесь же главное — овладеть в ы ч и с л и т е л ь н ы м и п р и ё м а м и.

Усвоение приёмов умножения и деления, основанных на распределительном и переместительном свойствах действий, составляет главную цель изучения этого раздела. Это типичные приёмы устных вычислений. Здесь закладываются основы устного счёта — устного умножения и устного деления.

Все вычисления записываются здесь в строчку, что является внешним признаком устных приёмов вычислений. Вычисления — умножение и деление — начинаются с десятков, например: $18\times 4=10\times 4+8\times 4=40+32=72$.

Деление на равные части и деление по содержанию не отграничиваются здесь друг от друга так строго, как раньше. Пример 96 : 4 читается так: «96 разделить на 4». Примеры на деление здесь решаются то как примеры на деление на равные части, то как примеры на деление по содержанию, в зависимости от величины делителя: если делитель — число однозначное, то легче делить данное число на равные части, если же делитель — число двузначное, то легче делить по содержанию. Н о к о г д а р е ш а ю т с я з а д а ч и, т о п р и о б ъ я с н е н и и р е ш е н и я н у ж н о с т р о г о р а з л и ч а т ь о б а в и д а д е л е н и я.

Наглядность здесь не утрачивает своего значения, но она и не играет решающей роли; главное здесь для ученика — уметь разложить двузначное число на десятки и единицы и знать, что при умножении следует сначала умножить десятки, потом единицы и полученные числа сложить, а при делении делить сначала десятки, потом единицы, или, если число десятков не делится без остатка,— уметь выделить такое число десятков, которое делится на данный делитель.

Умножение двузначного числа на однозначное.

Приём умножения двузначного числа на однозначное учитель выводит из сложения нескольких равных слагаемых, которое потом записывается как умножение.

Учитель пишет на классной доске: 32 + 32 + 32.

«Прочитайте пример и произведите сложение». (К 32 прибавить 32, получится: 30 да 30—60; 2 да 2—4; 60 да 4 — 64. К 64 прибавить 32, будет: 60 да 30—90; 4 да 2—6; 90 да 6 — 96.)

«Как можно ещё иначе сложить эти три числа?» (Сначала сложить все десятки, потом единицы: 30 да 30 — 60, 60 да 30 — 90; 2 да 2 — 4. 4 да 2 — 6; 90 да 6 — 96.) «Чтобы узнать, сколько будет всего десятков, вы к 3 десяткам прибавили 3 десятка и ещё 3 десятка. Как это узнать сразу?» (3 десятка повторить 3 раза, будет 9 десятков, или 90.) «А как сразу узнать, сколько будет всех единиц?» (2 умножить на 3, будет 6.)

«К 32 прибавить 32 и ещё прибавить 32. Как это сказать короче?» (32 взять 3 раза, или 32 умножить на 3.)

«А как записать короче?» (32 ╳ 3.) «32 умножить на 3 — сколько будет? Запишите» (32 ╳ 3 = 96.)

«Как мы умножили 32 на 3 — сразу или постепенно?» (Не сразу: сначала умножили 30 на 3, потом 2 на 3.)

«Значит, чтобы умножить 32 на 3, надо 32 разложить на десятки и единицы; сначала умножить десятки, потом единицы. Повторите, как же умножить 32 на 3? Умножьте: 23 на 2; 15 на 4; 44 на 2».

Примеры для объяснения располагаются так, что сначала идут такие примеры, в которых от умножения единиц получается меньше десятка (24╳2); потом такие, в которых от умножения единиц получается десяток (25╳2), и, наконец, решаются такие примеры, в которых от умножения единиц получается больше десятка (28╳2).

Деление двузначного числа на однозначное.

При делении двузначного числа на однозначное делимое разбивается на такие два числа, из которых одно даёт в частном десятки, другое — единицы. Для этого иногда достаточно разложить число на его десятки и единицы (48 : 2), иногда требуется раздробить в единицы один или несколько десятков (36 : 2; 90 : 2). Следует начать с первого из этих случаев, как более простого; затем рассмотреть деление круглых десятков, дающее в частном десятки вместе с единицами (30 : 2; 70 : 2), и затем уже перейти к общему случаю деления, требующему раздробления десятков в единицы.

Общий приём, одинаково применимый ко всем трём случаям деления, заключается в том, что сперва находят десятки частного, потом — единицы.

Первый случай (68 : 2) иллюстрируется на делении брусков-десятков и кубиков-единиц или на пучках и палочках.

На вопрос: «Как вы разделили 68 на две равные части», ученики отвечают: «6 десятков разделили пополам, получили 3 десятка; 8 единиц разделили пополам, получили по 4 единицы. Всего 30 да 4 будет 34». Пример записывается: 68 : 2 = 34.

Чтобы порядок деления был яснее для учащихся, можно при объяснении записать деление по этапам:

$$\frac{68 : 2 =}{\begin{array}{l} 60 : 2 = 30 \\ \ \ 8 : 2 = \ \ 4 \\ 30+4 = 34 \end{array}}$$

Второй случай — деление нечётного числа десятков пополам (например, 50 на 2) объясняется так:

Берётся 5 брусков или 5 пучков-десятков. «Очевидно, что 5 десятков не разделится пополам так, чтобы в каждой части было по целому числу десятков. Но 4 десятка делятся пополам. Берём 4 десятка и делим их; получается по 2 десятка. Остался 1 десяток. Развязываем его, иначе говоря, раздробляем его в единицы. Делим 10 пополам, получается 5. А всего получилось 20+5=25».

«На какие же числа (или группы) мы разбили 50, чтобы разделить их на две равные части?» (На 40 и 10.)

«Почему мы не делили сразу число 50?» (Потому что 5 десятков не делятся пополам, а 4 десятка делятся.) И в этом примере полезно записать отдельные этапы деления.

$$\frac{50 : 2 =}{\begin{array}{l} 40 : 2 = 20 \\ 10 : 2 = \ \ 5 \\ 20+5 = 25 \end{array}}$$

«Разделите на своих палочках на 2: 30, 70, 90. Сколько получается от деления каждого числа? Как делили?»

После этого производится деление на 4 чисел: 60, 100; на 5 — 60, 70, 80; на 6 — 90. Числа берутся из простых задач, например: «2 *м* сатина стоят 30 руб. Сколько стоит 1 *м*?» «В двух ящиках лежит 70 карандашей, в каждом поровну. Сколько карандашей в каждом ящике?» «В 4 одинаковых пачках 100 тетрадей. Сколько тетрадей в каждой пачке?» и т. д.

Третий случай деления на однозначное число, когда приходится один или несколько десятков раздроблять в единицы; например: 52 : 2.

Как будем делить 52 на 2 равные части?

Так как дети уже умеют делить двузначное число на однозначное типа 48 : 2, 36 : 3 и др., то они могут ответить так: «Мы разделим сначала 50, потом 2». «Как же вы разделите 50 на 2?» (Мы разложим 50 на 40 и 10.) «На какие же числа разложится тогда всё число 52?» (На 40, 10 и 2.) «Делите». (40 разделить на 2, получится 20; 10 разделить пополам, будет 5; 2 разделить на 2, будет 1. А всего получится 20 + 5 + 1 = 26.) «Из скольких десятков и единиц состоит число 26? От деления какого числа мы получили 2 десятка?» (От деления 40.) «От деления какого числа получилось 6 единиц?» (От деления 12.) «Значит, на какие же группы удобно сразу разложить число 52?» (На две группы — 40 и 12.) «Делите». (40 разделить на 2, будет 20; 12 разделить пополам, будет 6, а всего получится 20+6=26.)

«Разделим 72 на 3 равные части. Делятся ли все 7 десятков на 3 равные части? Какое самое большое число десятков из 7 разделится на 3?» (6 десятков.) «Поэтому на какие же две группы удобно разбить число 72 для деления его на 3?» (На 60 и 12.) «Делите». (60 разделить на 3 равные части, будет 20; 12 разделить на 3, будет 4; 20 и 4, будет 24.)

Запишем так, как мы делили:

$$\frac{72 : 3 = ?}{\begin{array}{l} 60 : 3 = 20 \\ 12 : 3 = \ \ 4 \\ 20+4 = 24 \end{array}}$$

Этот случай деления надо показать на брусках и кубиках.

Умножение на круглые десятки.

Умножать на круглые десятки дети могут двояким способом: 1) путём последовательного умножения, например: $2\times40=2\times4\times\times10=80$; 2) путём перестановки сомножителей, например: $2\times\times40=40\times2=80$. Оба эти приёма учащиеся должны знать. Даже если они на практике пользуются перестановкой сомножителей, они должны понимать и уметь объяснять приём последовательного умножения на круглые десятки.

Этот приём объясняется так:

«У мальчика было 30 двухкопеечных монет. Сколько было у него денег? Как это узнать?» (Надо 2 умножить на 30.) «Запишите это!»

Ученик пишет: 2 коп. $\times 30 =$

«Как набрать 30 двоек? По одной двойке набирать долго. Как набрать скорее?» (10 двоек — 20, ещё 10 двоек — 20 и ещё 10 двоек — 20. Всего 3 раза по 10 двоек. 3 раза по 20 — будет 60.) «Запишем это так: $2\times30=2\times10\times3=60$». «Как же мы получили 60?» (2 умножили на 10, получили 20. Потом 20 умножили на 3, получили 60.) «Поменяем теперь местами 10 и 3. Умножим так: $2\times30=2\times3\times10=60$. Как мы сейчас умножили 2 на 30?» (Сначала умножили 2 на 3, потом 6 на 10.)

«Так сколько же денег было у мальчика? Вспомните задачу. Умножьте теперь 2 на 40. Как умножали?» (Сначала умножили 2 на 4, потом 8 на 10. Получилось 80.) «Умножьте по этому способу: 3 на 20; 2 на 50».

Далее учитель ставит вопрос, нельзя ли пример 2×30 решить по-другому. Дети вспоминают свойство умножения: при умножении можно переставлять числа одно на место другого. Переставляя, получают пример: 30×2. Результат действительно не меняется (60). Последний способ легче, поэтому им можно пользоваться.

Умножение на двузначное число.

Этот случай умножения достаточно подготовлен предыдущей работой: ученики умеют умножать отдельно на круглые десятки и отдельно на единицы. Теперь им надо понять, что для умножения на двузначное число следует разложить двузначное число на десятки и единицы и сначала умножить на десятки, потом на единицы. Например:

$$\begin{array}{r} 3\times25=?\\ \hline 3\times20=60\\ 3\times\ 5=15\\ 60+15=75 \end{array}$$

Объясняя приём умножения, ученики говорят: «Чтобы умножить 3 на 25, надо умножить 3 на 20, будет 60; дальше надо 3 умножить на 5, будет 15; 60 да 15 будет 75».

Показав этот приём и поупражняв в нём учащихся, следует обратить внимание детей и на возможность выполнения в данном случае умножения путём перестановки сомножителей. «Вместо того чтобы умножать 4 на 25, можно умножить 25 на 4,— так легче, а результат от перестановки чисел не меняется».

Устанавливая последовательность в решении примеров, надо расположить их в порядке постепенно возрастающей трудности, а именно: сначала брать такие примеры, в которых от умножения на

единицы получается менее десятка (например, 2×24), потом — примеры, в которых получается десяток (например, 2×35), наконец,— примеры, в которых получается более десятка (например, 3×28).

Деление двузначного числа на двузначное.

В этом случае частное находится путём проб и проверяется при помощи умножения. Таким образом, приём деления в этом случае основан на умножении.

Например, пусть требуется разделить 64 на 16.

Разделить 64 на 16 это значит узнать, сколько раз 16 содержится или повторится в 64. Может быть 2 раза? Мало: 2 раза по 16 будет только 32. Может быть 3 раза? 3 раза по 16 — 48. 3 — мало. Может быть 4 раза? 4 — годится: 4 раза по 16, будет 64.

По мере упражнений число проб постепенно сокращается. Учащиеся скоро приходят к выводу, что далеко не всегда надо начинать пробы с числа 2. При делении, например, 90 на 15 совершенно очевидно, что в результате не может получиться ни 2, ни 3. Пробу целесообразно начинать с числа не менее 4.

На предыдущих случаях деления учащиеся привыкли к делению сначала десятков, потом — единиц. Этот приём некоторые учащиеся начинают применять и при делении на двузначное число. Так, деля 96 на 16, некоторые получают в результате 10. (Это значит, что ученик делил 9 десятков на 1 десяток, 6 единиц на 6 и полученные результаты сложил.) Эту ошибку надо предупредить хотя бы простым указанием на то, что при делении двузначного числа на двузначное нельзя делить по частям (отдельно десятки, отдельно единицы). Кроме того, получив результат, всегда нужно его проверять умножением.

Деление двузначного числа на двузначное относится к наиболее трудным случаям деления, поэтому на этот случай деления нужно дать достаточно много упражнений.

Деление с остатком.

Деление с остатком является необходимой подготовкой к делению многозначных чисел. Уменье делить многозначное число в конечном итоге сводится к уменью делить двузначные числа с остатком. Поэтому в школе нужно уделять большое внимание этому вопросу.

П о н я т и е о д е л е н и и с о с т а т к о м даётся с помощью наглядных пособий на делении небольших чисел, примерно, в пределе 20.

Вызывая одного ученика за другим, учитель даёт им карандаши и предлагает разделить их поровну между двумя учениками. Учащиеся наблюдают, что 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 делятся на 2 н а ц е л о, без остатка. 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 не делятся нацело; получается 1 каран-

---

[1] Этот вопрос изучается в III классе в связи с письменным делением трёхзначных чисел на однозначное.

даш **в остатке.** Деление с остатком записывается так:

17 : 2 = 8 (ост. 1).

Эта запись читается так: «17 разделить на 2, получится 8 и в остатке 1».

Дальше таким же образом делятся числа первых двух десятков на 3; сначала производится деление 3, 6, 9, 12, 15 на 3; затем делятся на 3 числа 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14. В последнем случае в остатке получается то 1, то 2. Некоторые примеры на деление с остатком записываются, например:

14 : 3 = 4 (ост. 2).

Проделав ещё несколько примеров на деление кубиков или палочек **по содержанию**, установив при этом частное и остаток, учитель предлагает ученикам записать все числа подряд до 20, которые делятся на 2 без остатка, и все числа, которые делятся на 2 с остатком.

В заключение решаются задачи на деление с остатком, например:

«13 карандашей надо разложить в 3 коробки поровну. По скольку карандашей нужно положить в каждую коробку и сколько карандашей при этом останется?»

«Верёвку длиной в 18 *м* надо разрезать на куски по 4 *м*. Сколько выйдет кусков и сколько метров при этом останется?»

Подготовительные упражнения к делению с остатком чисел, больших 20, заключаются в том, что учащиеся выписывают ряды чисел (из табличного умножения), которые делятся на данное число без остатка. Для числа 4 это будет следующий ряд: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40.

Для числа 5—5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50.

Все другие промежуточные числа делятся, очевидно, с остатком. Приём деления с остатком в пределах **табличного** деления заключается в следующем: если данное число не делится без остатка, то найти наибольшее из всех меньших чисел, которое делится нацело, и разделить его. Полученный результат и будет частное. Разница между данным числом и меньшим числом, которое делится, составит остаток.

Например, пусть требуется разделить 49 на 9. На основании таблицы умножения ученики устанавливают, что это деление с остатком. На основании той же таблицы ученики находят меньшее, но близкое к 49, число, которое делится на 9; это число —45 (пятью девять — 45). Делят 45 на 9 и получают искомое число 5. Неразделённые 4 единицы (49—45) составят остаток.

Нужно приучить детей к тому, чтобы они проверяли деление при помощи умножения; так, решив пример: 41 : 6=6 (ост. 5), ученик должен уметь проверить решение: 6×6=36; 36+5=41. Кроме того, надо объяснить детям, что остаток всегда должен быть меньше делителя.

Какие остатки могут быть при делении: на 4? на 6? на 8? на 3? Какой самый большой остаток может получиться при делении:

на 5? на 7? на 2? Почему при делении на 6 в остатке не может быть число 6? — на все эти вопросы учитель должен дать при объяснении конкретные, наглядные и понятные детям ответы, а затем в свою очередь требовать от учеников уменья отвечать на эти вопросы и следить за тем, чтобы в остатке не получались числа, равные делителю или большие его.

Состав чисел первой сотни из множителей.

Знать состав чисел первой сотни — это значит уметь правильно, достаточно быстро и уверенно составлять каждое число в пределе 100 из различных пар сомножителей. Значение этого навыка огромно. Чтобы овладеть этим навыком, нужно систематически упражнять детей в разложении таких чисел, которые богаты множителями: 24, 36, 48, 60, 72, 96 и др.

1) Пример упражнений с числом 48.

«Назовите такие пары чисел, от перемножения которых получается 48. Запишите их».

Получается следующая табличка:

$1 \times 48 = 48$	$4 \times 12 = 48$	$12 \times 4 = 48$
$2 \times 24 = 48$	$6 \times 8 = 48$	$16 \times 3 = 48$
$3 \times 16 = 48$	$8 \times 6 = 48$	$24 \times 2 = 48$
		$48 \times 1 = 48$

2) Решите примеры; поставьте вместо x числа.

$48 = 4 \times x$	$48 = 24 \times x$	$48 = x \times 16$
$48 = 12 \times x$	$48 = x \times 6$	$48 = x \times 1$

3) Сколько в числе 48: двоек? троек? четвёрок? шестёрок? восьмёрок?

4) Во сколько раз нужно увеличить 12, 16, 24, чтобы получить 48?

Подобные упражнения надо проводить и с другими числами первой сотни.

Упражнения проводятся в порядке устного счёта.

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ.

ПЕРВАЯ ТЫСЯЧА.

Концентр «Первая тысяча» установлен только в конце XIX в.; до этого времени после сотни сразу переходили к изучению чисел любой величины. Однако изучение арифметики в таком порядке было трудно для детей: слишком резким был переход от сотни к числам любой величины. Изучение сотни не давало ребёнку необходимой подготовки для изучения нумерации больших чисел. Резкий переход был в приёмах и способах вычисле-

ния: в пределе 100 дети изучали устные приёмы вычислений, в пределе чисел любой величины — письменные приёмы. Чтобы «смягчить» переход от сотни к большим числам, чтобы сделать процесс обучения арифметике более доступным и лёгким для детей, потребовалось введение промежуточного концентра «Первая тысяча».

Цель этого концентра состоит в том, чтобы постепенно подготовить детей к изучению нумерации чисел любой величины. Устная и письменная нумерация чисел любой величины сводится к нумерации трёхзначных чисел, к нумерации первой тысячи. Все классы построены по образцу класса единиц. Хорошо изучив первый класс — класс единиц, мы подготовим детей к успешному изучению нумерации чисел любой величины.

Вторая задача этого концентра — подготовить постепенный переход от устных приёмов вычислений к письменным.

С переходом к изучению тысячи нужно смелее вводить арифметическую терминологию, постепенно приучать ученика пользоваться математическим языком, таким, каким излагаются арифметические правила и определения.

В этом концентре ученик должен научиться правильно называть арифметические действия (сложение, вычитание, умножение и деление), члены действий и их результаты.

Усвоение этой терминологии в программе приурочено к концентру чисел любой величины, но, чтобы это требование программы было выполнено, надо подготовить почву уже при изучении концентра «Тысяча».

Во втором классе изучаются действия над круглыми сотнями и круглыми десятками в пределе 1 000 с использованием только устных приёмов вычислений. В третьем классе изучаются действия над числами в пределе 1 000 с использованием не только устных, но и письменных приёмов вычислений.

При переходе к письменным вычислениям упражнения в устном счёте продолжаются. На них вырабатывается беглость счёта в пределе 100 и навыки устных вычислений в пределе 1 000.

НУМЕРАЦИЯ В ПРЕДЕЛЕ 1 000.

Устная нумерация.

При изучении нумерации в пределе 1 000 можно использовать в качестве наглядных пособий: 1) палочки и пучки (рис. 52), 2) арифметический ящик, 3) абак классный и нумерационную таблицу, 4) кружочки, нарисованные в клетках, 5) ленту длиной в 10 *м*, разделённую на метры, дециметры и сантиметры, 6) классные счёты, 7) цифровую кассу.

1. **Знакомство с сотней как новой счётной единицей.** Учитель кладёт на стол много (более 1 000) палочек в виде кучки и даёт учащимся задание сосчитать, сколько тут палочек.

Как лучше этот счёт организовать? По аналогии со счётом в пределе 100 дети устанавливают, что необходимо эти палочки сосчитать и связать по десятку, а затем по 10 десятков связать в сотни и, наконец, посчитать сотни. Вызываются к столу 4—5 уче-

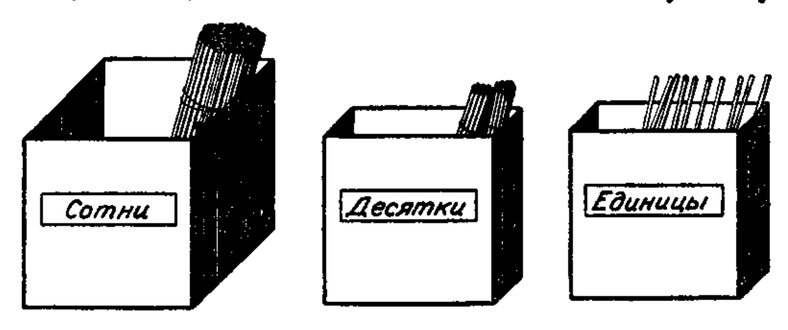


Рис. 52.

ников, которые на глазах всего класса проводят сначала подсчёт палочек по десяткам, связывая каждый десяток в пучок; потом считают десятки, связывая их в более крупные пучки-сотни. После этого остаётся один учащийся, который считает сотни и связывает их в большой пучок-тысячу. Основным вопросом на этом занятии является счёт сотнями. Ученик считает сотнями вслух: одна сотня, две сотни, три сотни, четыре сотни..., девять сотен, десять сотен. Делается вывод, что сотнями считают так же, как простыми единицами и как десятками. Сотня есть также счётная единица. Теперь дети знают следующие счётные единицы: простая единица, десяток и сотня.

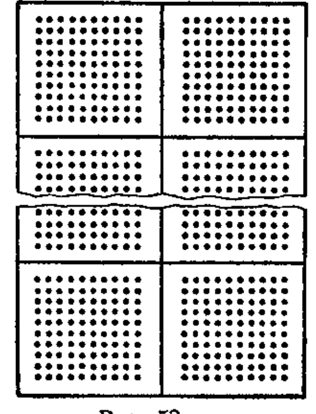


Рис. 53.

Затем учитель спрашивает у детей названия сотен — большинству детей это уже известно. «Одна сотня — иначе с т о. Как короче называются две сотни? три сотни? четыре сотни?» и т. д.

Названия: сто, двести, триста..., девятьсот учитель может записать на доске.

Десять сотен называются т ы с я ч а.

Ученикам показывается 10-метровая лента, разделённая на метры, дециметры и сантиметры, на ней они считают сотнями. Может быть также показана таблица кружочков, нарисованная в клетках. Установив, что в одном ряду 10 кружочков, а всего в

клетке 10 рядов, в которых помещается 100 кружочков (10 раз по 10=100), ученики считают клетки сотнями до тысячи (рис. 53). Заканчивается упражнение отвлечённым счётом сотнями. На этих наглядных пособиях учащиеся научатся считать сотнями до тысячи и получат конкретное представление о сравнительной величине десятка, сотни и тысячи, что и составляет цель изучения нумерации на этом первом этапе.

2. **Образование трёхзначных чисел из сотен, десятков и единиц** сначала на наглядных пособиях, потом отвлечённо. Учитель предлагает ученикам показать на пучках и палочках две сотни и восемь десятков и назвать полученное число.

«Как иначе назвать две сотни?» (Двести.) «Как иначе назвать восемь десятков?» (Восемьдесят.) «Как назвать всё число?» (Двести восемьдесят.)

Далее учитель предлагает показать на таблице кружочков три сотни, пять десятков и восемь единиц. «Какое число они составляют?» (Три сотни — триста, пять десятков — пятьдесят и восемь — всего триста пятьдесят восемь.)

«Какое число составят: шесть сотен и два десятка? девять сотен и пять единиц? четыре сотни, четыре десятка и четыре единицы? три сотни и пять десятков? три сотни и пять единиц?» и т. д.

«Назовите число, которое состоит из 6 сотен, 4 десятков и 5 единиц. Назовите число, в котором 9 сотен и 9 единиц».

3. **Разложение трёхзначного числа на сотни, десятки и единицы** — упражнение, обратное предыдущему. Учитель называет числа, ученики показывают эти числа на наглядных пособиях и объясняют их состав, говоря, из скольких сотен, десятков, единиц они состоят. «Пятьсот пятьдесят. Отложите это число на пучках палочек. Сколько в этом числе сотен и десятков?» (Восемьсот четырнадцать.) «Покажите это число на 10-метровой ленте. Сколько в нём сотен, десятков и единиц? Сколько сотен, десятков и единиц в числах: девятьсот четыре? двести двадцать? четыреста одиннадцать? семьсот восемнадцать?»

4. **Отвлечённый счёт до 1 000.** Было бы излишним и утомительным вести непрерывный счёт в пределе 1 000. Но очень полезно поупражнять детей в прямом и обратном счёте в той части натурального числового ряда, гре происходит переход через круглые сотни.

Например, учитель говорит: «Четыреста девяносто семь. Считай дальше».

Ученик: Четыреста девяносто восемь, четыреста девяносто девять, пятьсот, пятьсот один, пятьсот два... (На этом можно счёт прекратить.)

Обратный счёт. Учитель говорит ученику: «Восемьсот четыре. Отсчитывай по единице». (Восемьсот четыре, восемьсот три, восемьсот два, восемьсот один, восемьсот, семьсот девяносто девять, семьсот девяносто восемь, семьсот девяносто семь.) На этом счёт можно прекратить.

Если ученик, присчитывая по единице, назвал число «четыреста девяносто девять» и дальше затрудняется назвать следующее число «пятьсот», нужно дать объяснение: «Скажи, сколько сотен в числе четыреста девяносто девять?» (Четыре сотни.) «Назови остальную часть числа» (Девяносто девять.) «Присчитай к девяноста девяти одну единицу. Сколько получится?» (Сто.)

«Четыре сотни да сто, сколько будет?» (Пятьсот.) «Какое же число следует за числом четыреста девяносто девять?» (Пятьсот.) «Считай теперь, начиная с 497».

Подобного рода объяснение даётся и в случае затруднения при отсчитывании по единице.

После присчитывания и отсчитывания по единице полезно упражнять детей в присчитывании и отсчитывании групп единиц, например по 5, приурочивая счёт к переходу через сотни. «385! Считайте дальше, присчитывая по 5. 615! Считайте, отсчитывая по пятёрке» и т. д. Достаточно будет, если ученики назовут 4—5 чисел.

Наконец, следуют упражнения в определении места любого трёхзначного числа в ряду других трёхзначных чисел.

1) Какое число следует за числами: 199? 299? 599? 799? 999?

2) Какое число находится перед каждым из следующих чисел: 300? 500? 700? 200? 900? 1 000? 990? 650? 430? 220? 110?

3) Какое число находится между числами: 199 и 201? 499 и 501? 399 и 401? 279 и 281? 459 и 461? 639 и 641?

4) Между какими числами находится каждое из следующих чисел: 200? 400? 600? 800? 300? 500? 700? 900?

Письменная нумерация.

При изучении письменной нумерации трёхзначных чисел дети должны понять и усвоить, что единицы пишут на первом месте справа, десятки на втором месте, сотни на третьем месте. Если

Тысячи	*Сотни*	*Десятки*	*Единицы*
	●	●	●
	●	●	●
	●		●
			●
	3	*2*	*4*

Рис. 54.

нет единиц какого-либо разряда, то вместо них пишут нуль. Для пояснения этого правила нужно использовать абак и нумерационную таблицу.

На абаке показывается условное обозначение чисел при помощи кружков. В первом столбце с надписью «единицы» учитель откладывает один, два, три и т. д. кружков. Каждый кружок обозначает единицу. Набрав 10 кружков (10 единиц), учитель

объясняет детям, что вместо этих 10 кружков, помещённых в первом столбце, можно положить 1 кружок во втором столбце, с надписью «десятки». Этот один кружок обозначает здесь один десяток. Учитель откладывает во втором столбце один за другим кружки, а ученики называют числа: один десяток, два десятка, три десятка,... девять десятков, десять десятков. Или: десять, двадцать, тридцать, сорок и т. д.

Набрав 10 десятков во втором столбце, учитель объясняет детям, что вместо этих 10 десятков можно положить один кружок в третьем столбце с надписью «сотни». Один кружок в этом столбце означает 1 сотню. Таким образом учитель набирает 10 кружков в третьем столбце, а дети называют числа: сто, двести, триста, четыреста... 10 кружков третьего столбца заменяются одним кружком в четвёртом столбце, который означает одну тысячу.

Сотни | Десятки | Единицы

Рис. 55.

После этого идёт чтение чисел, обозначенных на абаке кружками.

Для этой цели удобно иметь абак с двигающимися картонными ленточками, открывающими по мере выдвижения, единицы любого разряда. Открыв на абаке 6 кружочков в полосе сотен, 2 — в полосе десятков и 5 — в полосе единиц (см. рис. 55), учитель ведёт такую беседу:

«Прочитайте, какое число я положил». (Шестьсот двадцать пять.) «Почему вы так прочитали его?» (На первой полосе открыто 6 кружочков, они означают 6 сотен; 2 кружочка на второй полосе означают 2 десятка, или двадцать; 5 кружочков на первой полосе — 5 единиц. А всё число: 625.)

«Теперь какое число обозначено?» (учитель открывает 408). «Почему это число 408? На каких полосах открыты кружочки? На которой полосе кружочков нет? Что это означает?» (Это означает, что в числе есть сотни и единицы, а десятков нет.)

«Теперь вы обозначьте на своих абаках число семьсот пятьдесят два. Почему отложенное число есть 752?» (Потому, что оно состоит из 7 сотен на 3-й полосе, 5 десятков на 2-й полосе и 2 единиц на 1-й полосе.)

«Обозначьте число 540. Почему не открыты кружочки на 1-й полосе (в числе 540)? Почему не открыты кружочки на 2-й полосе (в числе 906)?»

После упражнений на абаке, полезно проделать несколько упражнений с записью и чтением чисел цифрами в нумерационных табличках, которые учащиеся вычерчивают у себя в тетради.

Учитель объясняет значение каждой графы: если написана цифра 3 в графе сотен, она означает 3 сотни; если ту же цифру 3 написать в четвёртой графе, она будет означать 3 тысячи. Дальше учитель пишет цифру 4 в графе сотен и рядом цифру 2 в графе десятков. «Какое число написано?» (420). «Почему?» (4 означает 4 сотни, или 400; 2 означает 2 десятка, или 20; а всё число 420.) Учитель пишет в графе сотен цифру 6, а в графе единиц цифру 9. «Какое число написано?» (609.) «Почему это число именно шестьсот девять? Почему вторая графа оказалась пустой?»

Далее под диктовку учителя ученики записывают в своих табличках несколько чисел.

«Будем теперь записывать числа без таблицы. Для этого будем соблюдать правило: единицы пишутся на первом месте от правой руки, десятки—на втором, сотни—на третьем, тысячи — на четвёртом месте; если какой-либо десятичной группы нет, на её месте ставится нуль». Сначала записываются числа, имеющие все три разряда: учитель диктует число, ученики откладывают его на абаке, а затем пишут в своих тетрадях, после чего вызванный ученик пишет его на классной доске.

Затем следует запись трёхзначных чисел, в которых нет десятков, нет единиц, нет ни десятков, ни единиц (круглые сотни). Ученики подробно объясняют запись каждого числа.

Учась записывать числа, дети вместе с тем приобретают навык их ч т е н и я. Чтобы прочитать трёхзначное число, надо знать значение каждой цифры, которое зависит от занимаемого ею места.

Допустим, что надо прочитать число 578. Читая его, ученики дают следующее объяснение: цифра 5 стоит на третьем месте и означает 5 сотен, или пятьсот; цифра 7 стоит на втором месте и означает 7 десятков, или семьдесят; цифра 8 стоит на первом месте и означает 8 единиц. Всё число читается так: пятьсот семьдесят восемь.

Заканчиваются упражнения в чтении чисел названием их без объяснения.

Выписать весь натуральный ряд чисел до 1 000 невозможно, но можно и полезно написать числа в начале и конце каждой сотни.

1	2	3	4	96	97	98	99	100
101	102	103	104	196	197	198	199	200
201	202	203	204	296	297	298	299	300
301	302	303	304	396	397	398	399	400

И так до 1 000

Из этой таблицы, хотя бы и неполной, ученик увидит единообразие в построении числового ряда и место чисел в натуральном ряде.

Упражнения в разложении чисел на две группы — на десятки и единицы — (795=79 дес.+5 ед.; 630=63 десяткам). Это преобразование (превращение одних разрядных единиц в другие) должно войти как последнее звено в изучение нумерации чисел.

Сначала это преобразование показывается на наглядных пособиях.

Учитель кладёт на стол 2 больших (сотни) пучка, 3 маленьких (десятки) и 5 отдельных палочек.

«Какое число я обозначил пучками и палочками? Напишите его». (235.) «Сколько сотен, десятков и единиц в этом числе?» (2 сотни, 3 десятка и 5 единиц.)

«Заменим теперь большие сотенные пучки десятками. Сколько нужно пучков-десятков, чтобы заменить один сотенный пучок? Два сотенных пучка? Сколько теперь всего стало пучков?» (23.) «Сколько это десятков?» (23 десятка.) «На сколько групп теперь разбито всё число 235?» (На две группы.) «Какая первая группа?» (23 десятка.) «Какая вторая группа?» (5 единиц.) «Сколько же всего десятков и, кроме того, единиц в числе 235?» (23 десятка и 5 единиц.) «Запишите это: 235 = 23 дес. + 5 ед.»

Дальше следуют упражнения на основании рассуждений. Учитель пишет число 468.

«Прочитайте написанное число. Разложите его на десятки и единицы. Сколько будет всех десятков в этом числе? Как вы узнали это?» (В одной сотне 10 десятков, в 4 сотнях 40 десятков; 40 десятков да 6 десятков, всего 46 десятков.) «А сколько единиц в этом числе? Напишите так, чтобы видно было, что в числе 468 — 46 десятков да ещё 8 единиц». Ученики пишут: 468 = 46 дес. + 8 ед.

«Напишите число 540. Сколько всего десятков в этом числе?» (54.) «Как вы узнали, что 54 десятка?» (В одной сотне 10 десятков, в 5 сотнях 50 десятков да 4 десятка. Всего 54 десятка.)

«А сколько единиц в этом числе?» (Единиц нет. На месте их стоит нуль.)

Обратные упражнения: раздробление круглых десятков в единицы и составление чисел по данным его десяткам и единицам. Этот вопрос выясняется сначала на наглядных пособиях, а затем проводятся отвлечённые упражнения.

Учитель кладёт 15 пучков-десятков.

«Какое число я обозначил?» (15 десятков.) «Как можно по-другому назвать это число? Чем можно заменить 10 десятков?» (Одной сотней.) «Сколько десятков осталось?» (5 десятков.) «Сколько же всего единиц в этом числе — одной сотне и 5 десятках?» (Одна сотня — сто единиц да 5 десятков — 50 единиц. А всего 100 да 50 — сто пятьдесят единиц.) «Значит, 15 десятков всё равно, что 150».

Дальше можно проводить упражнения без наглядных пособий, обращаясь к ним только в случае затруднений.

«75 десятков. Как назвать это число по-другому?» (750.) «Как вы узнали, что 750?» (10 десятков составляют сотню, а 70 десятков составляют 7 сотен; 7 сотен да 5 десятков — 750.)

«Назовите число, которое состоит из 32 десятков и 6 единиц». (326.) «Как вы это узнали?» (32 десятка = 320 да ещё 6 единиц = всего 326.)

ДЕЙСТВИЯ НАД ЧИСЛАМИ В ПРЕДЕЛЕ 1 000.

Действия над числами в пределе 1 000 изучаются во втором и третьем классах: во втором классе — действия над круглыми сотнями и круглыми десятками, в третьем классе — все остальные случаи вычислений. Во втором классе используются только устные приёмы вычислений, в третьем классе — устные и письменные.

В этом концентре действия изучаются последовательно: сначала сложение, потом вычитание и т. д. При изучении каждого последующего действия ранее пройденные действия повторяются и закрепляются на сложных примерах и задачах.

ДЕЙСТВИЯ НАД КРУГЛЫМИ СОТНЯМИ И КРУГЛЫМИ ДЕСЯТКАМИ.

(II класс)

Сложение.

Упражнения в сложении круглых сотен и десятков могут проводиться в следующей системе.

1. **Сложение круглых сотен с круглыми десятками и единицами:** а) 300+50; б) 400+6; в) 840+5; 500+68. Эти случаи сложения тесно примыкают к нумерации и легко решаются учащимися на основе уменья составлять число из разрядных единиц.

2. **Сложение круглых сотен:** 300 + 200; 600 + 400. Чтобы сложить 300 да 200, ученик должен сложить 3 сотни да 2 сотни, получится 5 сотен, или 500. Следовательно, 300 + 200 = 500.

3. **Сложение любых трёхзначных чисел с круглыми десятками и круглыми сотнями** (без перехода через сотню): а) 250+30; б) 406+60; в) 423+70; а) 640+300; б) 508+200; в) 276+400.

Начиная с этих примеров, нужно приучить учащихся к поразрядному сложению. Например, чтобы прибавить 30 к 250, разбиваем число 250 на 2 сотни и 5 десятков, затем прибавляем 30 к 50, получается 80; 200 да 80 будет 280.

Чтобы прибавить 300 к 640, разбиваем последнее слагаемое на сотни и десятки — на 600 и 40, затем 3 сотни прибавляем к 6 сотням, получается 9 сотен, или 900; да 40 будет 940.

4. **Сложение любых трёхзначных круглых чисел без перехода через сотню:** а) 320+240; б) 580+120. Сложить 320 и 240 можно так: 300+200=500, 20+40=60, 500+60=560.

5. **Сложение круглых десятков, а также сложение любых трёхзначных круглых чисел с переходом через сотню:** а) 80+60; б) 480+60; в) 540+290.

Круглые десятки (80+60) можно складывать двойным способом: 1) к 80 прибавить 20, будет 100; к 100 прибавить 40, получится 140. Значит 80+60=140. 2) 8 десятков да 6 десятков будет 14 десятков, 14 десятков=140. Значит, 80+60=140. Познакомить учащихся нужно и с тем и с другим способом, предоставив учащимся право пользоваться ими по своему выбору. Первым спосо-

бом пользуются обычно чаще. Нужно дать учащимся большую практику в сложении круглых десятков, чтобы они умели довольно быстро находить правильные результаты.

6. **Сложение трёхзначного числа с однозначным и двузначным без перехода через сотню** (262+5; 540+36).

Приём сложения в данном случае заключается в том, что сотни не трогаются, а складываются десятки и единицы первого слагаемого с десятками и единицами второго слагаемого. Так, чтобы сложить 262 и 5, складываются 62 и 5, будет 67; 200 да 67, получится 267.

Чтобы сложить 540 и 36, складываются 40 и 36, будет 76. 500 да 76, получится 576.

Вычитание.

Изучение вычитания круглых сотен и десятков проводятся, примерно, в следующей системе:

1) В ы ч и т а н и е к р у г л ы х с о т е н, например: 600 — 400; 900 — 400. 600 — это 6 сотен, 400 — это 4 сотни; от 6 сотен отнять 4 сотни, остаётся 2 сотни, или 200. Значит, 600—400 = 200.

2) В ы ч и т а н и е и з т р ё х з н а ч н о г о ч и с л а е г о с о т е н, д е с я т к о в, е д и н и ц, например: 786—700; 325—25; 542—2; 485—80. Вычитание во всех данных случаях всецело основывается на знании состава трёхзначного числа.

3) В ы ч и т а н и е к р у г л ы х д е с я т к о в б е з п е р е х о д а ч е р е з с о т н ю, например: 690—50; 270—20. Десятки в данном случае вычитаются только из десятков; сотни при этом не трогаются. Так, 90 — 50 = 40; 600 + + 40 = 640.

4) В ы ч и т а н и е и з т р ё х з н а ч н ы х ч и с е л (к р у г л ы х д е с я т к о в) круглых сотен, например: 520 — 300; 780 — 400. Вычислительный приём состоит в том, что сотни вычитаются из сотен; десятки при этом не затрагиваются:

500 — 300 = 200; 200 + 20 = 220.

5) В ы ч и т а н и е и з т р ё х з н а ч н о г о ч и с л а д в у з н а ч н о г о б е з п е р е х о д а ч е р е з с о т н ю. Здесь берутся более лёгкие случаи: 650 — 24; 276 — 30. Вычитание в данных случаях сводится к вычитанию двузначного числа из двузначного не затрагивая сотен, например:

650 — 24 = ?	276 — 30 = ?
50 — 24 = 26	76 — 30 = 46
600 + 26 = 626	200 + 46 = 246

6) В ы ч и т а н и е т р ё х з н а ч н ы х ч и с е л — к р у г л ы х д е с я т к о в б е з п е р е х о д а ч е р е з с о т н ю: 380—120; 760—450. Вычитание в данном случае производится так: от уменьшаемого последовательно отнимаются сначала сотни, а затем десятки вычитаемого:

380 — 120 = ?	760 — 450 = ?
380 — 100 = 280	760 — 400 = 360
280 — 20 = 260	360 — 50 = 310

7) В ы ч и т а н и е и з к р у г л ы х с о т е н: е д и н и ц, к р у г л ы х д е с я т к о в, д в у з н а ч н ы х ч и с е л: 500—8; 600—40; 800—25. Во всех

трёх случаях применяется один и тот же вычислительный приём: для вычитания от уменьшаемого берётся только одна сотня, остальные не трогаются:

$500 - 8 = ?$	$600 - 40 = ?$	$800 - 25 = ?$
$100 - 8 = 92$	$100 - 40 = 60$	$100 - 25 = 75$
$400 + 92 = 492$	$500 + 60 = 560$	$700 + 75 = 775$

8) Вычитание из круглых сотен круглых десятков 500 — 280; 900 — 460. В данном случае надо научить детей последовательному вычитанию из круглых сотен сначала сотен, а потом десятков вычитаемого, а именно:

$500 - 280 = ?$	$900 - 460 = ?$
$500 - 200 = 300$	$900 - 400 = 500$
$300 - 80 = 220$	$500 - 60 = 440$

9) Вычитание круглых десятков с переходом через сотню: 140 — 60; 230 — 80. Вычислительный приём заключается в следующем: от 140 отнимается 40, затем от 100 отнимают 20 (40 да 20 = 60). Можно использовать и другой способ: 140 — это 14 десятков, 60 — это 6 десятков: от 14 десятков отнять 6 десятков, останется 8 десятков, или 80. Значит, 140 — 60 = 80.

Второй приём удобен, когда уменьшаемое заключено в пределе 200; вычитание в этом случае сводится к табличному вычитанию. Во всех остальных случаях более удобен первый приём.

Здесь не исчерпаны все случаи устного вычитания. Возможны и некоторые другие случаи, например: если потребуется от 287 отнять 2, то нецелесообразно в таком случае обращаться к письменному приёму вычисления. Но во II классе не следует гнаться за большим: здесь нужно усвоить вычислительные приёмы вычитания по преимуществу круглых чисел.

Умножение.

Умножение в пределе 1 000 во II классе ограничивается наиболее простыми и лёгкими случаями, а именно:

Умножением на однозначное число: 1) круглых сотен (300×2, 200×5), 2) круглых десятков (60×4, 90×7) и 3) чисел, состоящих из сотен и десятков (240×4, 360×2).

1. **Умножение круглых сотен на однозначное число.** Здесь распространяется на сотни уже известная детям таблица умножения в пределе 10, например дано: 200 умножить на 4; 2 сотни умножить на 4, будет 8 сотен, или 800. Значит, 200 × 4 = 800.

2. **Умножение круглых десятков.** Здесь потребуется применение таблицы умножения во всём её объёме, например, пусть дано умножить 70 на 6. Рассуждаем так: 70 это 7 десятков; 7 умножить на 6, будет 42; 7 десятков умножить на 6, будет 42 десятка, или 420. Значит, 70×6=420.

Уменье быстро и безошибочно умножать круглые десятки играет большую роль в культуре устного счёта. Поэтому детям нужно дать больше таких упражнений, тем более что на них повторяется вся таблица умножения. Задание нужно разнообразить: «60 умножить на 5», «60 взять 5 раз», «60 увеличить в 5 раз», «какое число больше 60 в 5 раз?»

3. **Умножение чисел, состоящих из сотен и десятков.** Пусть дано умножить 240 на 3. Для этого число 240 разлагаем на сотни и десятки и умножаем сначала сотни, потом десятки. $200\times3=600$; $40\times3=120$; $600+120=720$. Значит, $240\times3=720$.

Это умножение можно выполнить и другим способом: 240 — это 24 десятка. Умножим 24 десятка на 3. Получим 72 десятка, или 720. Значит, $240\times3=720$.

Учащиеся, как показывают наблюдения, предпочитают пользоваться первым способом.

Деление.

Деление в пределе 1 000 производится во II классе только над такими числами, которые представляют собой или круглые сотни, или круглые десятки, или числа, состоящие из сотен и десятков. Нужно иметь в виду, что навыки деления требуют от ученика уменья анализировать состав числа, уменья одно и то же число разбить на составные части по-разному в зависимости от делителя. Например, если число 960 делить на 6, то его нужно разбить на 600 и 360; но если 960 делить на 8, то его удобно разбить на 800 и 160: наконец, это же число можно рассматривать как 96 десятков, и тогда деление сведётся к делению 96 на 6 или на 8, т. е. к внетабличному делению в пределе 100. Заметим, что деление в пределе 1 000 является хорошим материалом для повторения и закрепления знаний таблицы деления и внетабличного деления. Учитывая большое значение этого раздела, учителю нужно пройти его тщательно.

Укажем порядок расположения материала и приёмы устного деления.

1. **Деление круглых сотен сводится** к делению однозначных чисел. Например, пусть надо 800 разделить на 4. 800 — это 8 сотен; 8 разделить на 4, будет 2; 8 сотен разделить на 4, будет 2 сотни или 200. Значит, $800 : 4 = 200$.

2. **Деление чисел, состоящих из сотен и десятков,** причём и сотни, и десятки в отдельности делятся на делитель: $240 : 2$; $360 : 3$ и т. д. 240 состоит из 2 сотен и 4 десятков. Разделим на 2 сначала 2 сотни, получится 100. Разделим на 2 потом 4 десятка, будет 20. А всего получится $100+20=120$. Следовательно, от ученика в данном случае требуется уменье разбить число на сотни и десятки.

3. **Деление таких чисел, сотни и десятки которых в отдельности не делятся на делитель:** $120 : 3$; $210 : 7$; $360 : 9$. Будем рассматривать каждое делимое как сумму десятков. Так, 120 — это 12 десятков; 210 — это 21 десяток; 360 — это 36 десятков. Делим 12 десятков на 3, получится 4 десятка, или 40; значит, $120 : 3=40$. Делим 21 десяток на 7, получим 3 десятка, или 30; значит, $210 : 7=30$ и т. д. Выходит, что для деления в таких случаях нужно знать хорошо таблицу деления и уметь данное число представить в виде десятков.

4. **Деление круглых сотен, когда цифра сотен не делится на** делитель и когда в частном получаются сотни и десятки: 600 : 4; 900 : 6; 700 : 5 и т. д. Число 600 не делится на 4 так, чтобы получились только сотни. В таких случаях надо уметь делимое разбить на два числа, из которых одно должно быть такое, чтобы от деления его получились круглые сотни. Для этого число 600 при делении на 4 надо разбить на 400 и 200; 700 при делении на 5 надо разбить на 500 и 200. Далее процесс деления труда не представляет. Если учащиеся будут испытывать затруднения в разбивке числа, надо показать её на наглядных пособиях — на пучках палочек.

5. **Деление трёхзначных чисел, состоящих из сотен и десятков,** причём ни сотни, ни десятки в отдельности не делятся на делитель, вместе же они составляют число десятков, делящееся нацело: 420 : 3; 560 : 4; 750 : 5. Существует два способа деления в таких случаях.

Первый способ. Разлагаем 420 на два таких числа, из которых каждое в отдельности делится на 3. Такими числами будут 300 и 120. Деля каждое из них на 3, получим частное 100+40=140.

Второй способ. Будем рассматривать 420 как 42 десятка: разделим 42 десятка на 3, получим 14 десятков, или 140. Этот приём деления нужно проиллюстрировать на наглядных пособиях — пучках палочек (сотни и десятки).

Оба эти способа одинаковой трудности. Показать и объяснить их нужно оба. Наблюдения показывают, что дети пользуются преимущественно первым способом.

Изучив каждый из названных случаев в отдельности, надо дать ученикам в конце побольше упражнений смешанного типа. Главное на этой стадии обучения — научить детей пользоваться приёмами устного деления, поэтому учитель, спрашивая учеников, не должен довольствоваться только получением результатов, а нужно непременно спрашивать, как именно ученик получил результат, каким способом или приёмом деления при этом пользовался.

Решение примеров на деление нужно всё время сопровождать проверкой при помощи умножения.

ПИСЬМЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ПРЕДЕЛЕ 1 000.

(III класс)

Письменное сложение.

Если расположить все случаи письменного сложения в порядке возрастающей трудности, то получится следующая система упражнений:

1) сложение без превращения в сумме единиц в десятки и десятков в сотни, например: 324+542;

2) сложение с превращением в сумме единиц в десятки, например: 128+467;

3) сложение с превращением в сумме десятков в сотни, например: 275+184;

4) сложение с превращением в сумме единиц в десятки и десятков в сотни, например: 568+295;

5) сложение чисел с нулями, например: 540+384; 608+279.

Объяснение сложения. Возьмём тот случай сложения, когда сумма чисел любого разряда меньше 10 и, следовательно, когда никаких превращений не производится.

Пусть, например, дано сложить 426 и 352. Сделаем сложение сперва устно; для этого записываем пример в строчку и производим сложение так: 400 да 300 = 700; 20 да 50 = 70; 700 да 70=770; 6 да 2=8; 770 да 8=778.

Так складывать большие числа неудобно, потому что приходится держать в памяти результаты сложения отдельных десятичных групп. Чтобы произвести сложение легче, выполним его письменно.

В первом числе (берём вышеприведённый пример) 4 сотни, 2 десятка и 6 единиц. Во втором числе 3 сотни, 5 десятков и 2 единицы. Подпишем одно число под другим так, чтобы 2 единицы стояли под 6 единицами, 5 десятков под 2 десятками, 3 сотни под 4 сотнями. Проведём черту. Слева поставим знак сложения. Получится запись:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}426\\352\end{array} \\ \hline 778 \end{array}$$

Сложим эти числа: 4 сотни да 3 сотни — 7 сотен; запишем 7 под сотнями; 2 десятка да 5 десятков — 7 десятков; запишем цифру 7 под десятками; 6 единиц да 2 единицы — 8 единиц; запишем под единицами. Всего получилось 778.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}426\\352\end{array} \\ \hline 778 \end{array}$$

Мы начинали сложение с сотен. А теперь произведём сложение в другом порядке — начнём сложение с единиц. Оказывается, всё равно, в каком порядке мы складываем числа; результат получается один и тот же. Будем всегда складывать, начиная с единиц.

Далее переходят к тому случаю сложения, когда сумма цифр одного из разрядов равна 10. Например: 465+225; 274+432.

На решении примеров этого типа ученики научатся превращать единицы в десяток и относить его к десяткам, превращать десятки в сотню и относить её к сотням.

После этого можно перейти к сложению чисел, в которых сумма единиц и сумма десятков более 10, например: 358 + 476.

Процесс сложения объясняется примерно так:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 358 \\ 476 \end{array} \\ \hline 834 \end{array}$$

8 да 6—14 единиц; 4 единицы пишем, а 1 десяток прибавим к десяткам. 1 десяток да 5 десятков — 6 десятков, да ещё 7 десятков — 13 десятков; 3 десятка пишем, а одну сотню прибавим к сотням. 1 сотня да 3 сотни — 4 сотни, да ещё 4 сотни — всего 8 сотен; записываем их. Всего получилось 834.

Постепенно у учеников вырабатывается краткая и простая форма объяснения сложения: 8 да 6 — 14; 4 пишу, 1 — в уме; 1 да 5 — 6, да ещё 7 — 13; 3 пишу, 1 — в уме; 1 да 3 — 4, да ещё 4 — 8. Всего получилось 834.

Но когда краткая форма установлена, время от времени нужно предлагать ученикам называть те разряды, над которыми производятся вычисления. Полезно прорешать столбики с несколькими слагаемыми и притом с такими, где даются вперемежку трёхзначные и двузначные числа.

Нужно сообщить, что числа, над которыми производится сложение, называются слагаемыми, а число, которое получается в результате сложения, называется суммой. Познакомив учащихся с этими терминами, учитель приучает детей пользоваться ими и сам вводит их в свою речь, в свои задания и предложения: «Прочитай первое слагаемое! Прочитай второе слагаемое! Какая получилась сумма?» и т. д.

В заключение надо показать, почему же лучше начинать письменное сложение с единиц.

З а д а ч и н а с л о ж е н и е. Здесь решаются простые и сложные задачи, в которых требуется: а) найти сумму двух или нескольких слагаемых; б) увеличить число на несколько единиц; в) по данному вычитаемому и остатку найти уменьшаемое.

Письменное вычитание.

Для усвоения письменного вычитания нужно соблюсти следующие методические ступени:

а) Каждый разряд уменьшаемого больше соответствующего разряда вычитаемого: 546 — 234.

б) Единицы уменьшаемого равны нулю, или они меньше единиц вычитаемого: 580 — 164; 642 — 325.

в) Десятки уменьшаемого равны нулю, или они меньше десятков вычитаемого: 708 — 265; 728 — 265.

г) Единицы и десятки уменьшаемого меньше соответствующих разрядов вычитаемого: 835 — 276, или оба эти разряда обозначены нулями: 600 — 417.

д) В середине уменьшаемого нуль, а единицы его меньше единиц вычитаемого: 605 — 227.

Объяснение вычитания. Возьмём пример: 546 — 234; произведём вычитание сперва устно.

В числе 234 — 2 сотни, 3 десятка и 4 единицы. Вычтем из 546 сначала 2 сотни. Для этого от 5 сотен отнимем 2 сотни, останется 3 сотни, а всего 346. Вычтем дальше из 346 три десятка. Для этого отнимем 3 десятка от 4 десятков, останется 1 десяток, а всего 316. Вычтем, наконец, из 316 четыре единицы, для этого из 6 единиц вычтем 4 единицы, останется 2 единицы, а всего 312.

Такое вычитание трудно, так как приходится держать в памяти остатки. Произведём вычитание письменно: для этого подпишем одно число под другим так, чтобы единицы были под единицами, десятки под десятками, сотни под сотнями.

$$\begin{array}{r} -\ 546 \\ 234 \\ \hline 312 \end{array}$$

От 5 сотен отнимем 2 сотни, получится 3 сотни; запишем их под сотнями. От 4 десятков отнимем 3 десятка, останется 1 десяток; запишем его под десятками. От 6 единиц отнимем 4 единицы, получится 2 единицы; запишем их. Получилось в остатке 312.

Произведём вычитание, начиная с единиц. Сравним остатки. Они одинаковы. Будем всегда вычитать, начиная с единиц.

Далее, прежде чем перейти к тому случаю вычитания, где приходится **з а н и м а т ь** одну единицу высшего разряда, проделаем вычитание на пучках палочек, чтобы дать детям наглядный, конкретный пример этого занимания и раздробления.

Берём 8 пучков-десятков и 3 палочки, обозначающие число 83. Даём задание — отнять 8 палочек. Очевидно, для вычитания нужно в з я т ь 1 пучок-десяток и р а з в я з а т ь его. Получится 7 пучков-десятков и 13 палочек. Теперь вычтем 8 палочек. Останется 7 пучков-десятков и 5 палочек, или 75.

Решим с помощью наглядного пособия ещё один случай вычитания: у мальчика имеются деньги — две десятки и 4 бумажки по одному рублю. Ему нужно из этих денег уплатить 7 руб. Как это сделать? Очевидно, надо взять одну десятку и р а з м е н я т ь её на рубли; получится всего 14 руб. Из этих 14 руб. мальчик может уплатить 7 руб. Останется у него десятка да 7 руб., а всего 17 руб.

Теперь можно перейти к тому случаю письменного вычитания, где на указанные приёмы можно будет опереться.

Вычтем 325 из 642, подписав эти числа одно под другим:

$$\begin{array}{r} -\ 642 \\ 325 \\ \hline 317 \end{array}$$

Объясняя вычитание, учитель говорит примерно так: «От 2 единиц отнять 5 единиц нельзя. Берём один десяток. Чтобы показать, что 1 десяток взят, ставим над цифрой 4 точку. Десяток р а з д р о б л я е м в единицы, получается 10 единиц, да в числе имеется своих 2 единицы, а всего будет 12 единиц. От 12 единиц отнимаем 5 единиц, будет 7 единиц; пишем их под единицами. От 3 десятков (почему от 3, а не от 4) отнимаем 2 десятка, останется 1 деся-

ток; записываем его под десятками. От 6 сотен отнимаем 3 сотни, остаётся 3 сотни; пишем их под сотнями. Всего получилось 317».

Так же подробно объясняют решение примеров и ученики. Но постепенно форма объяснения делается короче. В конце изучения вычитания, в особенности когда ученики выполняют вычитание в порядке решения задачи, они могут ограничиться лаконической формой объяснения, а именно:

«От 2 отнять 5 нельзя. Занимаем один десяток. От 12 отнять 5, будет 7. От 3 отнять 2, будет 1. От 6 отнять 3, останется 3. А всего получилось 317».

Решая примеры второго типа, ученики усвоят самое характерное в вычитании — занимание и раздробление, после этого можно перейти к решению примеров, в которых приходится последовательно занимать и десятки, и сотни (613—245). Ничего принципиально нового здесь ученики не встретят.

С новой трудностью ученики встретятся тогда, когда перейдут к вычитанию чисел из круглых сотен (200 — 87). Приём вычитания в этом случае надо проиллюстрировать на наглядном пособии — на пучках палочек.

Выполним задание — от 2 сотенных пучков отнять 38 палочек: 38 — это 3 десятка и 8 единиц. А в уменьшаемом у нас имеются только сотни; как поступить в таком случае? Очевидно, нужно взять одну сотню и развязать её, она распадётся на 10 пучков-десятков. Теперь 3 десятка можно отнять, но 8 палочек пока ещё отнять нельзя, так как отдельных палочек у нас нет. Чтобы их получить, возьмём из 10 десятков 1 десяток, развяжем его и получим 10 отдельных палочек. Надо сопоставить то, что было и что получилось. Было: 2 пучка — 2 сотни. Стало: 1 пучок — сотня, 9 пучков-десятков, 10 отдельных палочек, а всего 2 сотни.

Как получили последнее число? Развязали один сотенный пучок, получили 10 десятков; оставили 9 десятков, а один десяток развязали и получили 10 отдельных палочек-единиц. Отняв 3 десятка и 8 палочек, получим 162 палочки.

Теперь произведём вычитание письменно $\begin{array}{r} -\,200 \\ 38 \\ \hline 162 \end{array}$, рассуждая так:

«От нуля отнять 8 нельзя (нуль показывает, что единиц в уменьшаемом нет). Возьмём десяток. Но десятков тоже нет: на их месте стоит нуль. Тогда возьмём (займём) одну сотню. Сотню раздробим в десятки (сотенный пучок палочек развязывали, а здесь раздробляем), получим 10 десятков. На месте десятков оставим только 9 десятков, а один десяток раздробим в единицы и получим 10 единиц. Что же у нас получилось в уменьшаемом? 1 сотня, 9 десятков, 10 единиц. (При первом объяснении для большей наглядности учитель может делать наверху уменьшаемого надписи; над десятками поставить маленькую цифру 9, над единицами 10, т. е. $\begin{array}{r} {}^{9\,10} \\ 2\,0\,0 \\ 38 \\ \hline \end{array}$ Но ученикам таких надписей делать не следует.) Теперь будем вычитать: от 10 единиц отнять 8 единиц, останется 2 единицы, пишем их. От 9 десятков отнять 3 десятка, получится 6 десятков, запишем их. От одной сотни (почему от одной, а не двух?) ничего не вычитаем и переносим её целиком в остаток. Получилось 162».

Последняя разновидность примеров — с нулём в середине уменьшаемого — ничего нового по сравнению с предыдущим примером в себе не содержит и может быть выяснена без помощи наглядных пособий.

Желательно, чтобы учащиеся были ознакомлены с названиями данных чисел и результата: уменьшаемое, вычитаемое, остаток.

З а д а ч и н а в ы ч и т а н и е. При изучении вычитания в пределах 1 000 ученики упражняются в решении задач на вычитание как простых, так и сложных. Здесь решаются задачи, в которых требуется:

1) найти о с т а т о к;

2) найти р а з н о с т ь двух чисел;

3) данное число уменьшить на несколько единиц;

4) по данному уменьшаемому и остатку найти вычитаемое («У мальчика было 75 коп., когда он купил книгу, у него осталось 25 коп. Сколько он уплатил за книгу?»).

Письменное умножение.

Если расположить различные случаи письменного умножения в пределе 1 000 в порядке возрастающей трудности, то получится следующая система упражнений:

а) Произведение каждого разряда множимого на однозначное число меньше десяти, например 324×2=648.

б) Произведение единиц множимого на множитель равно 10, например 245×2=490.

в) Произведение единиц множимого на множитель больше 10, например 218×3=654.

г) Произведение десятков множимого на множитель равно или больше 10, например 452×2=904; 172×4=688.

д) Произведение единиц и десятков множимого на множитель больше 10, например 179×5=895.

Кроме того, некоторую особенность представляют те случаи умножения, когда во множимом на месте единиц или десятков встречаются нули, например 230×4; 408×2. Эти случаи можно не выделять в особый раздел, но они должны быть в поле внимания учителя и тщательно объяснены учащимся.

О б ъ я с н е н и е п и с ь м е н н о г о у м н о ж е н и я. Подведём учеников к умножению через задачу.

«С одного участка собрали 234 мешка картофеля, а с другого в 2 раза больше. Сколько мешков картофеля собрали с другого участка?» Выясняем, что для ответа на вопрос задачи нужно 234 умножить на 2. Как будем умножать? Выполним умножение устно. Для этого сначала умножим сотни, потом десятки, наконец, единицы: 2 сотни взять 2 раза, получится 400; 3 десятка взять 2 раза, будет 60; 400 да 60, будет 460; 4 умножить на 2, получится 8; 460 да 8, будет 468. Запишем это так, по мере получения отдельных результатов:

$$234 \times 2 = 400 + 60 + 8 = 468.$$

Перейдём к письменному умножению: запишем действие столбиком.

Перемножим эти числа, начиная с единиц: умножим на 2 сначала единицы, потом десятки, наконец,— сотни.

Поупражняем учеников в решении примеров этого типа и перейдём дальше к решению более сложных примеров, в которых от умножения единиц получается в произведении больше 10.

$$\begin{array}{r} 327 \\ \times\ \ 3 \\ \hline 981 \end{array}$$

Решая этот пример, учитель даёт подробное объяснение: «3 раза по 7 единиц, будет 21; единицу пишем, а два десятка прибавим к десяткам; 3 раза по 2 десятка, будет 6 десятков да ещё 2 десятка, которые получились от умножения единиц, будет 8 десятков; записываем их; 3 раза по 3 сотни, будет 9 сотен. Всего получилось 981».

Объяснение может быть более кратким: «Трижды 7 — 21, 1 пишем, 2 в уме; трижды 2—6, да 2—8; трижды 3—9. Получилось 981».

К такому краткому объяснению можно перейти только после того, как ученики научатся хорошо и обстоятельно объяснять умножение, называя те разряды, с которыми они имеют дело.

Особо надо остановиться на тех примерах, в которых произведение каждого разряда больше 10. Такие примеры для решения трудны, но зато они и очень полезны; на них развивается способность удерживать в памяти необходимые числа, уменье выделять из данного числа единицы высшего разряда (16 десятков — 1 сотня и 6 десятков), закрепляется знание таблицы умножения. Для последней цели желательно брать такие числа, которые обозначаются цифрами, большими 5, например 98×7.

Задачи на умножение. В связи с изучением действий в пределе 1 000 повторяется решение всех видов простых задач, связанных с умножением, а именно:

а) Задачи, в которых требуется данное число повторить слагаемым несколько раз.

б) Задачи, в которых данное число нужно увеличить в несколько раз.

в) Задачи, в которых по данному делителю и частному нужно найти делимое.

Все эти задачи решаются как в виде простых задач для устного счёта, так и в составе сложных задач.

Письменное деление на однозначное число.

Устное деление, если оно объяснено обстоятельно и усвоено с пониманием, является хорошей подготовкой к письменному делению. По сути между ними много общего. В самом деле, допустим, что мы делим 750 на 5. Устное деление сводится к тому, что мы число 750 разлагаем на два таких числа, из которых каждое в отдельности делится на 5,— 500 и 250; от деления первого получаются сотни, от деления второго — десятки. Но и при пись-

менном делении происходит то же, только в другой форме: нужно так перейти от устного деления к письменному, чтобы ученики уловили то общее, что объединяет их, чтобы в условных обозначениях письменного механизма они увидели его подлинный смысл, в условной пятёрке письменного деления видели там, где это нужно, 5 сотен, в тройке — 3 десятка и т. д. Не нужно бояться затратить время на то, чтобы показать ученикам подробные записи, выясняющие смысл деления на каждом его этапе.

Как и при знакомстве с другими действиями, надо связать письменное деление с устным, расположить различные случаи деления в такой последовательности, которая обеспечит постепенное нарастание трудности.

Система упражнений. Примеры на деление должны решаться в такой последовательности:

1. Каждый разряд делимого делится нацело на делитель (846 : 2; 936 : 3).

2. Понятие о делении с остатком; упражнение в табличном делении с остатком.

3. Десятки не делятся нацело и их остаток приходится раздроблять в единицы (575 : 5).

4. Сотни не делятся нацело и их остаток раздробляется в десятки (728 : 4; 429 : 3).

5. Примеры, где приходится остатки сотен и десятков раздроблять последовательно в низшие разряды (685 : 5; 936 : 4 — примеры с двумя раздроблениями).

6. Примеры, в которых от деления трёхзначных чисел на однозначное получается двузначное частное (168 : 2; 546 : 6).

7. Предыдущая разновидность примеров осложняется тем, что десятки не делятся нацело (288 : 9; 450 : 6).

Объяснение письменного деления начнём с деления таких трёхзначных чисел, в которых каждый разряд делимого делится на однозначное число без остатка.

Разделим 248 *на* 2. Для этого разложим число 248 на 2 сотни, 4 десятка и 8 единиц. Будем делить на 2 каждый разряд, начиная с сотен. Запишем деление в строчку: 248 : 2 = 124. Прорешаем несколько таких примеров и перейдём к тому случаю деления, когда не все разряды делятся без остатка на делитель.

```
_324|2
 2  |162
 _12
  12
   _4
    4
    0
```

Разделим 324 *на* 2 Выполним деление сначала устно. Для этого разобьём число 324 на три числа, из которых каждое без остатка делится на два: на 200, 120 и 4. Разделим 200 на 2, получим 100; разделим 120 на 2, получим 60 и, наконец, разделим 4 на 2, получим 2. Сложим 100, 60 и 2, получим 162.

Это деление можно было бы проиллюстрировать предварительно на наглядном пособии, взяв 3 сотенных пучка палочек, 2 пучка-десятка и 4 палочки. Очевидно, что деля 3 сотни на 2, мы получим по одной сотне и одна сотня получится в остатке. Раздробляем её в десятки (развязываем её, и она распадается на десять пучков-десятков), получаем из сотни 10 десятков, да у нас есть ещё 2 десятка, всего получится 12 десятков, делим их пополам, получается по 6 десятков. Остаётся ещё разделить пополам 4 палочки, получится по 2 палочки. А всего получится 1 сотня, 6 десятков и 2 единицы, или 162.

Теперь произведём это же деление письменно, записав его «столбиком».

«Решим пример 936 : 4 с подробным объяснением:

Разделим 9 сотен на 4, получим 2 сотни. Умножим 2 сотни на 4, получим 8 сотен. От 9 сотен отнимем 8 сотен, останется 1 сотня. Раздробим сотню в десятки, получим 10 десятков, да 3 десятка в самом числе — всего 13 десятков.

```
_936| 4
  8  |234
 _13
  12
  _16
   16
    0
```

Делим их на 4, получим 3 десятка. Умножаем 3 десятка на 4, получим 12 десятков. Отнимем 12 от 13, останется 1 десяток. Раздробляем его в единицы, получим 10 единиц, да в числе 6 единиц, всего 16 единиц. Делим их на 4, получим 4 единицы. Умножим 4 на 4, получится 16. Значит, разделилось всё число и получилось 234. Проверим, правильно ли выполнено деление; для этого 234 умножим на 4. 4 раза по 200—800, 4 раза по 30 — 120, 4 раза по 4—16. Сложим 800, 120 и 16. Получится 936. Деление выполнено правильно».

Полезно спросить учеников, на какие же группы нам пришлось разбить число 936, чтобы разделить его на 4.

Если ученики назовут эти группы (8 сот., 12 дес., 16 ед.), то тем самым они покажут, что они выполнили деление вполне сознательно.

Учащиеся усвоят на этих примерах, что деление начинается с высшего разряда (с сотен), что делить надо каждый разряд и что от деления каждого разряда в результате (частном) получаются единицы того же разряда.

З а д а ч и н а д е л е н и е. Изучение деления в пределе 1 000 должно способствовать выработке у детей более отчётливого понятия о делении как о действии, заключающем в себе оба его вида — деление на равные части и деление по содержанию. Этот процесс объединения обоих видов деления и лучшего понимания особенностей каждого из них происходит главным образом на решении задач. Задачи должны решаться устные и письменные, простые и составные. Здесь должны быть представлены все виды задач на деление: а) задачи, в которых требуется разделить число на несколько равных частей; б) задачи, в которых требуется узнать, сколько раз одно число содержится в другом; в) задачи на нахождение определённой части числа; г) задачи, в которых требуется уменьшить данное число в несколько раз; д) задачи на кратное сравнение чисел.

УСТНОЕ СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ, УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ НА 10 И КРУГЛЫЕ ДЕСЯТКИ.

Приём округления чисел при сложении и вычитании.

Изучая 1 000, учащиеся знакомятся с приёмом округления и упражняются в применении его в сложении и вычитании.

Сначала нужно научить детей о к р у г л я т ь числа.

«Имея 99 коп., я могу сказать, что у меня без малого 100 коп., или 1 рубль.

В доме живёт 198 человек. Мы можем сказать, что в этом доме без малого 200 человек.

Расстояние между двумя деревнями 31 *км*. Мы можем сказать что между этими деревнями 30 *км* с лишним.

Вместо чисел	взяли числа
99	100
198	200
31	30

Числа 100, 200, 30 могут быть названы круглыми. Поэтому говорят, что числа 99, 198, 31 округлили. Ученик не должен забывать, что числа 99 и 100, 198 и 200 не равны, но 99 очень мало разнится от 100».

Сложим 240 и 98. Округлим 98 до 100 и к 240 прибавим 100, получится 340. Но, округлив 98, мы прибавили 2 лишние единицы. Отнимем их от 340 и получим правильный остаток — 338.

Умножение на 10. При умножении одной единицы на 10 получается один десяток, или 10. При умножении 7 единиц на 10 получается 7 десятков, или 70. Умножив 28 единиц на 10, получим 28 десятков, или 280. Решив несколько подобных примеров и записав их решение, получим:

$$7 \times 10 = 7 \text{ дес.} = 70$$
$$16 \times 10 = 16 \text{ дес.} = 160$$
$$28 \times 10 = 28 \text{ дес.} = 280$$

Сравним в этих примерах множимые и произведения и сделаем обобщение-вывод: «При умножении числа на 10 получается столько десятков, сколько во всём числе было единиц».

Умножение на круглые десятки. Пусть требуется умножить 15 на 30. Возьмём 30 раз по 15 так: 10 раз по 15, ещё 10 раз по 15 и ещё 10 раз по 15. Каждый раз получаем 150, а всего получим 3 раза по 150, или $150 \times 3 = 450$. Вместо 150 напишем 10 раз по 15 (15×10). Значит, как же мы умножили 15 на 30? Сначала умножили 15 на 10, а потом то, что получилось, взяли 3 раза: $15 \times 10 \times 3$. Умножив 15 на 10 и на 3, мы умножили число на 30 (10×3). Значит, чтобы умножить какое-нибудь число на 30, нужно это число умножить на 10, а потом полученное число ещё умножить на 3 или, наоборот, умножить на 3 и полученное число на 10.

Как умножить какое-нибудь число на 50? на 80? на 40? Число 25 умножили на 6, полученное число умножили на 10. Во сколько раз увеличилось число 25?

Число 12 умножили на 4; полученное число взяли ещё 10 раз. Во сколько раз увеличилось число 12?

Вывод: «Чтобы умножить число на круглые десятки, достаточно умножить его на число десятков, потом полученное число умножить на 10».

Деление на 10. Пусть требуется разделить 360 на 10.

Поставим вопрос, сколько раз 10 содержится в 360. В этом числе 36 десятков. Значит, десяток содержится в этом числе 36 раз. Поэтому $360 : 10 = 36$. Решим ряд таких примеров, применяя то же рассуждение. Получим табличку:

$$360 : 10 = 36$$
$$520 : 10 = 52$$
$$280 : 10 = 28$$

В каждом примере мы делили число на 10 и получали столько единиц, сколько в делимом десятков. Правило можно сформулировать так: «При делении числа, оканчивающегося нулём, на 10 получается столько единиц, сколько в числе десятков».

Можно объяснить деление на 10 и иначе, рассматривая это деление, как деление на равные части. Пусть дано разделить 360 на 10 равных частей. Каждый десяток при делении на 10 даёт единицу. В числе 360 всего 36 десятков; 36 десятков при делении на 10 дадут 36 единиц, или просто 36.

Решая примеры деления на 10, полезно пользоваться вперемежку то тем, то другим способом рассуждения.

Деление на круглые десятки. На этой ступени мы ещё не можем зачёркивать нули и ссылаться на свойство неизменяемости частного, если делимое и делитель уменьшить в одно и то же число раз. Здесь при объяснении мы можем опереться только на конкретный смысл деления. В самом деле, мы делим 480 на 60 для того, чтобы узнать, сколько раз 60 содержится в 480 или сколько получится в каждой части, если 480 разделить на 60 равных частей. Сколько же раз 60 содержится в 480? Рассуждаем так: 480 это 48 десятков, 60 это 6 десятков; шесть десятков содержатся в 48 десятках 8 раз, потому что 8 раз по 6 десятков, будет 48 десятков. Чтобы получить 8, достаточно было 48 разделить на 6.

Теперь укажем другой приём деления, рассматривая это деление как деление на равные части. Пусть нужно 480 разделить на 60 равных частей. Чтобы разделить на 60 равных частей, можно число разделить на 10 равных частей, а потом каждую часть разделить ещё раз на 6 равных частей. Делим 480 на 10, получаем 48; теперь 48 делим ещё на 6, получаем 8.

Приём последовательного деления надо проиллюстрировать на чертеже. Пусть дан отрезок прямой длиной в 60 *см* и его надо разделить на 20 равных частей. Чтобы разделить на 20, поступаем так: делим отрезок сначала на 10 равных частей, а потом каждую часть ещё на две равные части, а всего отрезок разделится на 20 равных частей, и в каждой части получится по 3 *см*.

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ.

ДЕЙСТВИЯ НАД ЧИСЛАМИ ЛЮБОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

Значение этого концентра заключается в том, что здесь учащиеся овладевают нумерацией чисел любой величины и уменьем производить письменно четыре арифметических действия над многозначными числами, что составляет важнейшую составную часть элементарной арифметической грамоты. Это большая и сложная задача. Ей уделяется в III классе около 90 уроков, счи-

тая и уроки решения задач, на которых навыки письменных вычислений закрепляются и совершенствуются.

Попутно с изучением механизма письменных вычислений учащиеся усваивают и элементы той несложной теории, без которой не может быть успешного и сознательного усвоения навыка: название компонентов действий, зависимость между ними; правила выполнения действий; здесь же углубляется понимание переместительного и сочетательного свойств сложения и умножения, а также распределительного свойства умножения и деления; на проверке действий уточняется понятие о сложении и вычитании, умножении и делении, как о взаимнообратных действиях.

Выдвижение на первый план письменных вычислений не должно приводить к забвению устного счёта. И в этом концентре ученики тренируются в устном счёте; для этой цели используются не только специальные упражнения в устном счёте, но и самый механизм письменных вычислений, который позволяет сочетать письменные вычисления с устными.

Наглядные пособия применяются в этом концентре при изучении нумерации; изучение же действий над многозначными числами не требует применения «предметной» наглядности. Но это не значит, что учитель на этой ступени не должен обращаться к таким средствам, которые помогают лучшему пониманию и усвоению материала,— к различного рода плакатам, таблицам и схемам, которые по ходу содержания работы должны составляться учителем и вывешиваться в классе на время изучения данного вопроса. Известно, например, что названия чисел в действиях усваиваются учащимися с некоторым трудом. Полезно составить и вывесить в классе плакат примерно такой формы:

Названия чисел в арифметических действиях.

Сложение	Вычитание	Умножение	Деление
+ 372 — слагаемое 538 — слагаемое 910 — сумма	624 — уменьшаемое — 462 — вычитаемое 162 — остаток или разность	× 428 — множимое 2 — множитель 856 — произведение	Делимое ↓ 966 | 7 — делитель 26 | 138 — частное 56 0
Запомни эти названия!			

Переместительное свойство сложения и умножения также полезно оформить в виде плакатов.

«От перестановки сомножителей произведение не изменяется». Пользуйтесь этим свойством умножения! Оно облегчает вычисления.

Несомненно, что эти изобразительные средства, воздействуя на учащихся повседневно, облегчат им усвоение учебного материала.

НУМЕРАЦИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ.

Изучение нумерации многозначных чисел принадлежит к числу наиболее сложных разделов методики преподавания арифметики в начальной школе. Сложность этого раздела объясняется тем, что при изучении нумерации дети девятилетнего возраста подводятся к пониманию самых основных, самых коренных вопросов арифметики, а именно: к пониманию основ десятичной системы счисления, к знанию состава и структуры натурального числа. Знание же состава числа и понимание основ десятичной системы счисления существенно необходимо для успешного изучения арифметических действий, так как механизмы устных и письменных вычислений определяются особенностями десятичной системы счисления. Многие ошибки в действиях объясняются недостаточным знанием нумерации.

Когда учащийся, решая пример на вычитание с нулями в уменьшаемом, занимает единицу высшего разряда и затем, последовательно раздробляя её в единицы низших разрядов, делает ошибки в раздроблении, не знает, где над нулём должна стоять девятка и где десяток, то причину этих ошибок надо искать в нетвёрдом знании состава числа и единичного отношения двух смежных разрядов.

Когда учащийся, отделив при делении многозначных чисел несколько цифр делимого, не знает, какие разряды он делит, какие разрядные числа в частном получаются и вследствие этого пропускает нуль в частном, то эта ошибка имеет своим источником незнание состава числа.

Таким образом, пробелы в знании нумерации создают трудности при усвоении арифметических действий. И, наоборот, твёрдое знание нумерации представляет собой хорошую основу ясного понимания и лёгкого усвоения техники письменных вычислений с многозначными числами.

Нужно различать у с т н у ю нумерацию и п и с ь м е н н у ю; каждая из них имеет свои задачи. В процессе преподавания можно сначала изучить вопросы, связанные с устной нумерацией, потом — вопросы, составляющие содержание письменной нумерации. Возможен и другой порядок работы, при котором устная нумерация перемежается с письменной, изучается параллельно. Пользуясь такой усложнённой системой, нужно следить за тем,

чтобы не нанести ущерба устной нумерации, что нередко наблюдается в практике тех учителей, которые стремятся свести всё разнообразное и богатое содержание этого раздела только к записи и чтению чисел.

Область многозначных чисел, изучаемых в III классе, велика; она охватывает собой числа трёх классов до девятизначных включительно. Трудности чтения и записи чисел, определения их состава и преобразования увеличиваются по мере увеличения значности числа и усложнения его структуры. Учитывая это, можно развёртывать изучение нумерации по классам: сначала изучить устную и письменную нумерацию чисел 2-го класса, потом — устную и письменную нумерацию чисел 3-го класса.

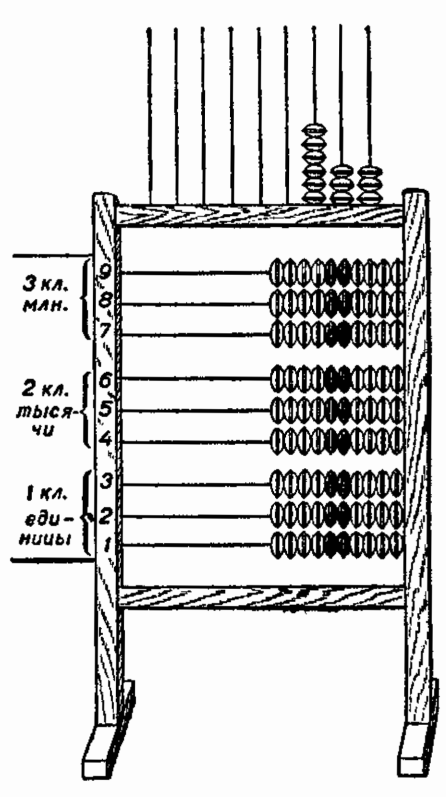


Рис. 56.

Однако такой порядок изучения нумерации многозначных чисел не является наилучшим; при нём процесс изучения нумерации растягивается, а главное, закономерности, присущие десятичной системе, не выступают с достаточной яркостью и отчётливостью.

Возможна при изучении нумерации иная система, при которой перед учениками раскрывается сразу вся область чисел до 3-го класса включительно. Нумерация многозначных чисел — это один из немногих вопросов начальной арифметики, где метод дедукции является наиболее уместным, где детали и частности лучше усваиваются, когда они даются на фоне общего и целого. «Мысль обозначать числа с помощью десяти знаков, основываясь на абсолютном и местном значении цифр, так проста, что только по этой причине мы забываем, какого она достойна удивления». Гениальная простота десятичной системы счисления, о которой говорит великий астроном и математик Лаплас, выступает ярко и даёт себя чувствовать с большой силой, когда мир больших чисел раскрывается перед учащимися сразу, смело и в больших масштабах. При одновременном изучении чисел, охватывающих три класса, ученик получает отчётливое и яркое представление о единообразии и ритме в группировке единиц по классам и разрядам, об от-

ношении единиц двух смежных разрядов и классов; десятичная основа счисления выступает при этом ярко и выпукло. Учитывая всё это, можно одновременно знакомить учеников с девятью счётными единицами, затем группировать их по разрядам и классам и уже на этой основе учить детей писать и читать числа в пределе трёх классов.

В качестве наглядных пособий должны при этом применяться классные счёты, нумерационная таблица с приспособлениями (с разрезами) для вставки цифр и абаки — классный и индивидуальные. На классных счётах должны быть вынуты четвёртая и восьмая проволоки, чтобы резче выделить классы; кроме того, на левой планке должны быть надписи: «класс единиц» — против первых трёх проволок, «класс тысяч» — против 4-й, 5-й и 6-й проволок, «класс миллионов» — против 7-й, 8-й, и 9-й проволок.

В соответствии с указанными выше принципами изучение нумерации может быть проведено в следующей системе.

1. **Знакомство со счётными единицами** (до миллиарда). На классных счётах ученикам показывается, как единицы множества соединяются в десятичные группы и как производится счёт полученными составными единицами.

Ученики считают единицами и, насчитав 10 единиц, заменяют их одним десятком. Дальше считают на второй проволоке десятками и, насчитав 10 десятков, заменяют их одной сотней. Далее считают на третьей проволоке сотнями и, насчитав 10 сотен, заменяют их на четвёртой проволоке одной тысячей.

Так поступают до миллиарда.

По получении новой счётной единицы учитель записывает её на классной доске. Так возникает на глазах учеников следующая таблица:

1) 10 единиц	составляют	1 десяток
2) 10 десятков	»	1 сотню
3) 10 сотен	»	1 тысячу
4) 10 тысяч	»	1 десяток тысяч
5) 10 десятков тысяч	»	1 сотню тысяч
6) 10 сотен тысяч	»	1 тысячу тысяч или 1 миллион
7) 10 миллионов	»	1 десяток миллионов
8) 10 десятков миллионов	»	1 сотню миллионов

Составление этой таблицы и её усвоение имеет большое значение: ученик усваивает названия счётных единиц (разрядов), порядок их расположения, процесс счёта, единичное отношение двух смежных разрядов, условное изображение счётных единиц на счётах. Число 10 как основа десятичной системы счисления выступает здесь очень отчётливо. Эта таблица переписывается учащимися в свои тетради, несколько раз прочитывается и даётся на дом для заучивания.

2. Составление многозначных чисел и разложение их на группы. На этом этапе занятий ученикам показывается, как с о-

Миллионы | Тысячи | Единицы
Сотни | Десят. | Един. | Сотни | Десят. | Един. | Сотни | Десят. | Един.

6 0 3 5 1 0 7 2 4

Рис. 57.

с т а в л я ю т с я и к а к н а з ы в а ю т с я числа, составленные из различных счётных единиц.

Для облегчения этой задачи нужно соблюдать два условия: во-первых, использовать в этой работе к л а с с н ы е с ч ё т ы; называя счётные единицы, из которых предполагается составить число, нужно в то же время откладывать их на классных счётах; это помогает ученику помнить названные учителем разряды; во-вторых, давать разрядные числа сначала только одного какого-либо класса, а потом двух классов; больше 5—6 разрядных чисел да-

вать не следует, так как ребёнку трудно держать их в памяти, даже если они отложены на счётах. Первые задания могут быть примерно таковы: «Какое число получится, если взять 3 сотни тысяч, 2 десятка тысяч и 5 тысяч? Какое число составят 7 сотен миллионов и 9 миллионов? 1 сотня миллионов 4 десятка миллионов и 8 миллионов?» самое сложное задание, включающее разряды двух классов, будет примерно таково: «Какое число составят: 3 дес. млн. 3 млн. и 4 сот. тыс. 4 дес. тыс. 4 тыс.?».

Вслед за *составлением* чисел по данным разрядным единицам идут упражнения в обратной операции — в *разложении* данного числа на разрядные слагаемые, «645 тысяч — сколько в этом числе отдельно сотен тысяч, десятков тысяч и единиц тысяч; 480 миллионов — сколько в этом числе сотен миллионов и десятков миллионов? Отложите это число на счётах!» Более сложное задание этого рода: «Назовите, из каких счётных единиц составлено число 215 тысяч 102 (единицы). Отложите это число на классных счётах!»

3. **Понятие о разрядах.** «Счётных единиц много; чтобы в них не ошибаться, каждую из них обозначают своим номером или *разрядом*, и каждая из них при записи чисел занимает своё место», примерно так учитель может пояснить необходимость введения термина «разряд». И далее даются общеизвестные определения: «Простые единицы называются единицами 1-го разряда; откладываются они на классных счётах на *первой* проволоке снизу; пишутся они на *первом* месте справа. Десятки называются единицами 2-го разряда, откладываются они на *второй* проволоке; пишутся они на *втором* месте справа...» И так до 10 разряда. Ученики вслед за учителем повторяют определения. В заключение учитель вычерчивает на классной доске *разрядную таблицу*.

Сотни миллионов	Десятки миллионов	Миллионы	Сотни тысяч	Десятки тысяч	Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы
9	8	7	6	5	4	3	2	1

Поясняя таблицу, учитель устанавливает связь её с той таблицей, которую ученики уже знают; здесь те же счётные единицы, или *разряды*, что и там; только там они расположены столбиком, а здесь — в длинный ряд. Каждый разряд имеет свой номер: единицы — 1-й разряд, десятки — 2-й разряд, сотни — 3-й и т. д. Таблица несколько раз читается учащимися и переписывается ими в свои тетради.

По таблице проводятся упражнения, направленные на запоминание места каждого разряда. Этому способствуют вопросы троякого рода:

I. На каком месте стоят простые единицы? тысячи? миллионы? десятки? десятки тысяч? десятки миллионов? и т. д.

II. Какие разрядные единицы стоят на 3-м месте? на 6-м месте? на 8-м месте? на 4-м месте? на 7-м месте? и т. д.

III. На 3-м месте стоит цифра 8; какое число она обозначает? На 7-е место поставлена цифра 5. Какое число она обозначает? 4-е и 5-е места заняты цифрами 2 и 3. Какое число они обозначают? и т. д.

Таблица разрядов даётся учащимся на дом для заучивания названий разрядных единиц в их естественной последовательности и для твёрдого усвоения места каждого разряда.

4. Понятие о классах. На предыдущих упражнениях учащиеся поняли и усвоили состав числа из десятичных групп (разрядов).

Теперь нужно подвести учеников к пониманию тысячной группировки единиц множества, дав им понятие о классе.

Отправным моментом может служить чтение чисел, откладываемых на классных счётах.

Учитель откладывает на счётах:

на 3-й проволоке 3 шарика
на 2-й » 8 шариков
на 1-й » 5 шариков

— Какое число отложено? — 385.

Учитель записывает на классной доске: 385 единиц.

— Сколько в этом числе: сотен? десятков? единиц?

— Значит (поясняет учитель), здесь мы считаем единицами.

Далее учитель откладывает на 6-й проволоке 3 шарика
на 5-й » 8 шариков
на 4-й » 5 шариков

— Какое число отложено?— 385 тысяч.

Учитель записывает на классной доске это число, подчёркивая слово «тысяч».

— Сколько в этом числе: сотен тысяч? десятков тысяч? единиц тысяч?

— Значит (поясняет учитель), здесь мы вели счёт тысячами.

И, наконец, учитель откладывает на 9-й проволоке 3 шарика
на 8-й » 8 шариков
на 7-й » 5 шариков

— Какое число отложено? — 385 миллионов.

Учитель записывает это число на классной доске, подчёркивая слово «миллионов».

— Сколько в этом числе сотен миллионов? десятков миллионов? единиц миллионов?

— Значит (поясняет учитель), здесь счёт ведётся миллионами.

На классной доске получилась запись:

385 единиц
385 тысяч
385 миллионов

Из этой записи видно, что счёт можно вести:

а) единицами, получая простые единицы, десятки и сотни единиц;

б) тысячами, получая единицы тысяч, десятки тысяч, сотни тысяч;

в) миллионами, получая единицы миллионов, десятки миллионов, сотни миллионов.

При счёте единицами получаются 3 разряда: единицы, десятки, сотни.

Эти 3 разряда составляют класс единиц. Это — первый класс.

При счёте тысячами получаются тоже 3 разряда — единицы тысяч, десятки тысяч, сотни тысяч. Эти 3 разряда составляют класс тысяч. Это — второй класс.

При счёте миллионами получаются тоже 3 разряда — единицы миллионов, десятки миллионов, сотни миллионов. Эти 3 разряда составляют класс миллионов. Это — третий класс.

Учитель вывешивает нумерационную таблицу (таблицу классов и разрядов) и на ней показывает место и разряды каждого класса, подчёркивает повторяемость разрядов в каждом классе (единицы, десятки, сотни).

3-й класс Миллионы			2-й класс Тысячи			1-й класс Единицы		
Сотни млн.	Десятки млн.	Единицы млн.	Сотни тысяч	Десятки тысяч	Единицы тысяч	Сотни	Десятки	Единицы
9	8	7	6	5	4	3	2	1
3	9	6	4	8	7	1	6	5

На основе этой таблицы учащиеся усваивают название классов, их порядок, какие разряды входят в каждый класс. На этой же таблице проводятся упражнения в записи и чтении чисел. Сна-

чала читаются и записываются числа в составе единиц **одного** какого-либо класса (487 тыс.; 396 млн.; 165 ед. и т. д.), а затем в составе двух и трёх классов. Затем анализируется состав числа по слуху; называется, например, число 306 млн. 517 ед. Спрашивается, какие тут классы даны и каких нет. Вывешивается печатная нумерационная таблица с приспособлением для вставки разрезных цифр и классный абак (рис. 42б). Учащиеся по заданию учителя упражняются в изображении различных чисел. На дом даётся задание начертить по учебнику нумерационную таблицу, усвоить всё о разрядах и классах и написать в таблице несколько чисел.

5. **Обучение записи и чтению многозначных чисел.** Это — центральный вопрос нумерации многозначных чисел. Вся предыдущая работа имела своей главной задачей подготовить учеников к осмысленной записи и чтению многозначных чисел, создать основу для успешного формирования этого навыка. Работа проводится по следующим трём этапам.

1-й этап. Запись круглых тысяч и круглых миллионов, например: 326 000; 508 000; 720 000 000; 68 000 000, 400 000 000.

Перед тем как записать число, производится его анализ, по слуху устанавливается, из единиц какого класса оно составлено, каких классов нет; число это откладывается на счётах и после этого записывается на доске и в тетрадях. Записав 485 тысяч, учитель ставит вопрос: «Какие места должны занимать цифры 4, 8, 5, чтобы они обозначили тысячи?» (Ответ: четвёртое, пятое и шестое.) «Чем же занять первое, второе и третье места?» (Нулями.) Появляется запись: 485 000. «На что указывают здесь нули?» (Ответ: На то, что здесь отсутствует первый класс — первый, второй и третий разряды.) «Сравните, какими цифрами записаны 485 единиц и 485 тысяч». (Одинаковыми.) «Какая же разница в записи этих чисел?» (Разница в том, что к числу тысяч приписаны три нуля.)

На основании разобранных таким образом трёх примеров делается вывод: «Чтобы записать число, составленное из тысяч, пишут сперва число тысяч, а затем приписывают к нему справа три нуля». Сообщается второе правило: «Чтобы легче писать и читать большие числа, надо при записи их отделять класс от класса небольшими промежутками».

Далее учитель объясняет запись чисел, составленных из миллионов: 235 миллионов 306 миллионов 700 миллионов

235 000 000 306 000 000 700 000 000

Выводится правило: «Чтобы записать число, составленное из миллионов, пишут сперва число миллионов, а затем приписывают к нему справа шесть нулей».

Вслед за записыванием чисел идут упражнения в чтении чисел, выраженных круглыми тысячами и миллионами, например: 28 000; 106 000; 900 000; 530 000 000; 725 000 000; 600 000 000 и т. д. Чтение первых примеров сопровождается объ-

яснением — почему именно так нужно прочитать данное число. Отвечая на этот вопрос, ученик говорит: 28 относится ко второму классу и поэтому означает 28 тысяч; 8 стоит на 4-м месте и обозначает 8 тысяч, 2 стоит на 5-м месте и обозначает 2 дес. тысяч, а всего 28 тысяч.

2-й этап. Запись и чтение любых многозначных чисел в пределе класса тысяч и класса миллионов.

Перед упражнениями в записи многозначных чисел учащиеся усваивают следующие основные положения письменной нумерации:

1) При записи чисел единицы записывают на 1-м месте, десятки — на 2-м месте, сотни — на 3-м, тысячи — на 4-м и т. д.

2) Одна и та же цифра может изображать число единиц любого разряда в зависимости от места, которое она занимает.

В самом названии чисел ясно слышатся названия его классов. Например, называя число 495 382 750, мы ясно слышим миллионы, тысячи, единицы: 495 **миллионов**, 382 **тысячи**, 750 **единиц**. Нужно обратить внимание учеников на это обстоятельство и приучить их к тому, чтобы они, записывая число, разлагали его на классы и записывали каждый класс, начиная с высшего. Диктуя число, надо делать небольшую остановку после названия класса и следить за тем, чтобы класс от класса ученики отделяли небольшим промежутком. Порядок упражнений: 1) запись чисел четырёх-, пяти- и шестизначных; 2) запись чисел семи-, восьми- и девятизначных. Вслед за записью идут упражнения в чтении чисел. Чтение чисел сопровождается объяснением. Перед тем как прочитать число, его надо разбить на классы, отправляясь от первого класса. Для упражнения в чтении чисел нужно обязательно давать числа (возможно больше!), записанные без промежутков между классами с тем, чтобы поставить учеников перед необходимостью разбивать число на классы. Класс от класса отделяется штрихом. Например: 753 124′015. Нужно проделать больше таких упражнений, чтобы выработать у учеников навык разбивать число на классы быстро и правильно.

3-й этап. Запись и чтение чисел, в которых отсутствуют некоторые разряды и целые классы, например: 12 000 625; 60 008 200.

Перед тем как приступить к упражнениям в записи таких чисел, ученикам напоминаются следующие положения:

1. Класс объединяет 3 разряда (единицы, десятки, сотни), поэтому в каждом классе должно быть 3 цифры.

2. Иногда в числах некоторые разряды отсутствуют. Место таких разрядов должно быть занято нулём. Если же «пустует» целый класс, то его место заполняется тремя нулями.

Назовём число: 625 млн. 357 ед. По слуху устанавливаем, что здесь отсутствует класс тысяч. На его месте должны стоять 000

(три нуля). Назовём другое число 625 млн. 8 тыс. 357 ед. Здесь два полных класса, а в классе тысяч даны только единицы тысяч; нет десятков тысяч и сотен тысяч. Их место займём нулями: 008. Допустим далее, что в этом числе дано 80 тысяч. В таком случае класс тысяч должен быть записан так: 080. Почему поставлены нули перед цифрой 8? после цифры 8? Запись всего данного числа: 625 080 357.

В упражнениях нужно давать числа всевозможной структуры. И чем разнообразнее будут варианты предложенных чисел, тем лучше для образования навыка.

Примерные варианты чисел для упражнений:

1. Числа с отсутствующими классами: 176 624 000; 48 000 738; 200 000 950 и т. д.

2. Числа с отсутствующими разрядами: 600 800 200; 504 308 705; 8 008 008; 70 060 060; 30 100 050 и т. д.

Вслед за упражнениями в записи чисел проводятся упражнения в чтении чисел с отсутствующими классами и разрядами.

Навык правильной и быстрой записи и чтения чисел создаётся в результате многократных упражнений. Школа должна обеспечить ученикам эти упражнения, проводя их в течение 5—10 минут на каждом из последующих уроков арифметики.

6. **Разложение числа на разрядные слагаемые.** С этим навыком ученики будут неоднократно встречаться в дальнейшем при применении распределительного закона умножения. Проделывая упражнения в разложении многозначных чисел на разрядные слагаемые, ученики научатся правильно понимать значение и «содержание» каждой цифры числа. В самом деле, когда ученик, разлагая число 724 605 на разрядные числа, напишет в качестве слагаемых 700 000, 20 000, 4 000, 600 и 5, он лучше поймёт конкретное значение каждой цифры этого числа. Методика этого вопроса проста. Основное здесь — в осторожном пользовании терминами «разрядные числа», «разрядные слагаемые», которые на примерах поясняются и вводятся в обиход речи ученика. Задание можно давать в следующей форме: «Разложите число на разрядные слагаемые» или «Представьте данное число в виде суммы разрядных чисел». Перед тем как приступить к записи слагаемых, анализируется состав данного числа из разрядов. Пусть дано разложить число 25 380. Приступая к операции разложения, ученик указывает, что данное число состоит из 25 тыс. 380 ед. В классе тысяч имеются десятки и единицы тысяч, в классе единиц — сотни и десятки

$$25\,380 = 20\,000 + 5\,000 + 300 + 80.$$

Не меньшее значение для понимания состава числа имеет и обратная операция: запись числа, данного в виде суммы разрядных слагаемых, по правилам нумерации. Например:

$$400\,000 + 9\,000 + 30 + 8 = 409\,038.$$

Хорошей разновидностью упражнений данного типа являются упражнения в записи цифрами таких чисел, которые записаны частично словами, например: 60 млн. 50 тыс. = 60 050 000.

7. **Упражнение в счёте.** Несмотря на то, что счёт единицами относится к устной нумерации, тем не менее его целесообразно поставить в конце данной темы.

Счёт единицами в пределе больших чисел громоздок, многословен и труден для учащихся; ребёнок испытывает при этом трудности не столько математического характера, сколько языковые, трудности удерживания в уме большого количества слов. Чтобы такой счёт облегчить, нужно соединить его с фиксацией чисел, с записью результатов счёта. А это возможно после того, как пройдена письменная нумерация.

В беспрерывном счёте единицами в пределе больших чисел нет необходимости вследствие единообразия в названии получаемых чисел. Счёт единицами полезно проводить на тех участках натурального ряда, где происходит переход из одного разряда в другой, из одного класса в другой.

«99 997! Считайте дальше, присчитывая по единице.

999 998! Считайте дальше, присчитывая по единице 4 единицы, и записывайте получаемые числа». Ученики считают про себя и записывают:

999 998, 999 999, 1 000 000, 1 000 001, 1 000 002.

8. **Увеличение и уменьшение числа в 10, 100, 1000 раз.** Увеличение и уменьшение числа в 10, 100 и т. д. раз путём приписывания и отбрасывания нулей справа помогает уяснению принципа поместного значения цифры в десятичной нумерации. Это потребуется при изучении раздробления и превращения разрядных единиц числа.

Объяснение этого вопроса заключается в следующем: а) к данному числу приписывается справа один нуль; б) полученное число сравнивается с данным и устанавливается, что оно увеличилось в 10 раз; в) выясняется, что от приписывания одного нуля число увеличивается в 10 раз, потому что после приписывания нуля каждая цифра переместилась влево на одно место; г) выводится правило: «Чтобы увеличить число в 10 раз, достаточно приписать к нему справа один нуль». Отсюда вывод: если нужно увеличить число в 10 раз, достаточно приписать к нему справа один нуль.

Подобным образом выясняется, что при приписывании к числу справа двух нулей каждая цифра подвигается влево на два места и получает значение в 100 раз большее; при приписывании трёх нулей каждая цифра подвигается влево на три знака и получает значение в 1 000 раз большее и т. д.

Обратная операция — уменьшение числа в 10, 100 и 1 000 раз — объясняется при помощи аналогичного методического приёма: отбрасывание нулей, сравнение полученного и данного числа,

выяснение причины уменьшения числа и вывод соответствующего правила.

9. Раздробление и превращение разрядных единиц числа. Каждое данное число ученик должен уметь представить в различных сочетаниях его частей, например, 35 675 — это 356 сот. + 75 ед., это 3 567 дес. + 5 ед., это 35 тыс. + 675 ед., и т. д. Это уменье окажет ученику неоценимую услугу, когда он подойдёт к изучению наиболее трудных арифметических действий — умножения и деления, в особенности деления, которое невозможно без разложения делимого на соответствующие его части.

Преобразование числа сводится к двум операциям — раздроблению и превращению одних разрядных чисел в другие.

Раздробление состоит в том, что данное число круглых десятков, круглых сотен, тысяч и т. д. выражают в единицах.

Превращение, наоборот, состоит в том, что данное число единиц преобразуют в более крупные разрядные единицы — в десятки, сотни, тысячи и т. д.

Раздробление. Дано 46 десятков. Пусть требуется выразить это число в единицах. Сколько единиц в 46 десятках? 1 десяток — это 10 единиц, 6 десятков — 60 единиц, 40 десятков — 400 единиц. Количество единиц в числе в 10 раз больше количества десятков в нём. Значит, в 46 десятках будет единиц в 10 раз больше. Увеличим 46 в 10 раз, для этого припишем к числу один нуль справа. Получим: 46 десятков = 460.

Так же установим, что в данном числе сотен содержится в 100 раз больше единиц. Отсюда 32 сотни = 3 200; 564 сотни = 56 400.

Превращение. Дано 720. Выразим это число в десятках. Сколько десятков в 720? Обратимся к небольшим числам: 30 — это 3 десятка; 60 это 6 десятков; 90 это 9 десятков; 10 единиц составляют только 1 десяток. Количество десятков в числе в 10 раз меньше количества единиц в этом числе. Значит, чтобы узнать, сколько десятков в числе 720, уменьшим 720 в 10 раз. Отбросим нуль, получится 72. Итак, 720 = 72 десяткам; 930 = 93 десяткам; 6 840 = 684 десяткам и т. д.

Так же покажем, что количество сотен в числе в 100 раз меньше количества единиц в этом числе: 3 600 = 36 сотен; 8 900 = 89 сотен; 14 600 = 146 сотен.

Но сколько десятков будет в числе, которое оканчивается не нулём, а какой-либо значащей цифрой, например: сколько десятков будет в числах 75? 456? 1 238? 25 815?

Ясно, что десятков не будет только в разряде единиц. Во всех остальных разрядах десятки есть. Единицы отбрасываем, а всё остальное число и будет числом десятков. Поэтому 75 = 7 дес. + 5 ед.; 456 = 45 дес. + 6 ед.; 1 238 = 123 дес. + 8 ед.; 25 815 = = 2 581 дес. + 5 ед.

Сколько *всего сотен* в числах: 638? 349? 63 714? Сотен нет только в единицах и десятках: они меньше сотни. А во всех других разрядах сотни есть. Поэтому, отбросив в числе его единицы и десятки, мы получим число сотен. Итак: 638=6 сот.+ +38 ед.; 3 149=31 сот.+49 ед.; 63 714=637 сот.+14 ед.

Так же выделяются *все тысячи* и *все десятки тысяч* из данных чисел.

10. **Контрольная работа.** Контрольная работа должна охватить всё содержание пройденного в его наиболее характерных и типических моментах.

1. Запишите числа (учитель диктует одно за другим 3 числа):

а) 548 тыс. 836.

б) 3 млн. 625

в) 8 млн. 80 тыс. 70.

2. Прочитайте про себя написанное на доске число, перепишите его к себе в тетрадь и рядом напишите его **словами** (на доске учитель пишет 40 000 040 →
против стрелки ученики должны написать «сорок миллионов сорок»).

3. 5 единиц 6-го разряда какое число обозначают? Запишите это число цифрами.

4. 18 единиц 3-го класса какое число обозначают? Запишите это число.

5. На доске написано число 306 028. Перепишите это число в свои тетради и разложите его на разрядные слагаемые.

6. На доске написано 86 сотен. Перепишите это число и после знака равенства напишите, сколько *единиц* в этом числе.

7. На доске написано число 8 475. Сколько всего сотен в этом числе?

8. Запишите число, которое на 4 единицы меньше одного миллиона.

После изучения нумерации многозначных чисел полезно познакомить учеников с метрической системой мер длины и веса, приведя в соответствие эту систему с десятичной основой нумерации.

	3-й класс — класс млн.			2-й класс — класс тысяч			1-й класс — класс единиц		
	сот. млн.	дес. млн	един. млн.	сот. тыс.	дес. тыс.	един. тыс.	сот.	дес.	един.
Единицы длины			*км*			*м*	*дм*	*см*	*мм*
Единицы веса			*т*	*ц*		*кг*			*г*

Подробнее об изучении таблиц мер см. стр. 330.

СЛОЖЕНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ.

Чтобы успешно изучать письменное сложение многозначных чисел, учащиеся III класса должны:

а) хорошо знать нумерацию многозначных чисел;

б) твёрдо знать таблицу сложения в пределе 20.

Все эти знания и навыки к началу изучения сложения программой обеспечиваются.

Система изучения сложения. Для образования навыка сложения многозначных чисел достаточно расчленить этот навык на следующие ступени: а) сложение чисел без перехода через разряд; б) сложение чисел с нулями в слагаемых и сумме; в) сложение с переходом через разряды. В рамках этой системы нужно упражнять учащихся в самых различных вариантах сложения: в решении примеров с одинаковым и разным количеством цифр в слагаемых; в решении примеров, где первое слагаемое имеет больше цифр, чем второе, и наоборот; в решении примеров с постепенно возрастающим количеством переходов через разряды; в качестве слагаемых должны быть различные многозначные числа. Большое место должны занимать примеры с несколькими слагаемыми: тремя, четырьмя и больше.

Выполнение сложения во всех этих случаях производится по одному и тому же правилу, но каждый вариант имеет свои особенности, и эти особенности ещё ярче подчёркивают общность принципа, лежащего в основе правила письменного сложения,— его строгую поразрядность и соблюдение переместительного свойства сложения.

Формирование навыка письменного сложения. Учащиеся умеют складывать единицы с единицами, десятки с десятками, сотни с сотнями. Теперь нужно распространить этот навык на последующие разрядные числа, предлагая учащимся для устного решения следующие примеры: 8 тыс. + 9 тыс.; 6 дес. тыс.+7 дес. тыс.; 7 сот. тыс.+8 сот. тыс. и т. д. Получаемые суммы (13 дес. тысяч, 15 сот. тысяч) нужно превращать в следующие высшие разрядные единицы (15 сот. тыс.= 5 сот. тыс.+1 млн.).

Создав таким образом основу для письменного сложения любых многозначных чисел, нужно перейти к письменному сложению двух четырёхзначных чисел без перехода через десяток. На этих случаях (по существу уже знакомых учащимся) нужно повторить названия чисел в сложении и сформулировать правило письменного сложения. («Чтобы сложить два числа, нужно подписать одно число под другим так, чтобы единицы стояли под единицами, десятки под десятками, сотни под сотнями и т. д. Под вторым слагаемым провести черту, слева поставить знак сложения и начинать сложение с единиц»). Правило нужно повторить несколько раз: оно способствует упорядочению записи сложения.

Название чисел (слагаемые и сумма) нужно объяснить обстоятельно, чтобы усвоение этих названий способствовало углублению понятия сложения. Числа, данные в сложении, складываются или соединяются в одно число, поэтому эти числа называются слагаемыми. Новое число, получаемое в результате, содержит столько единиц, сколько их во всех числах вместе, и называется суммой. Сложить два числа это то же, что соединить их в одно число, которое поэтому заключает в себе столько единиц, сколько их содержится в обоих слагаемых. При таком объяснении ученики должны понимать требование — найти сумму двух чисел.

От сложения чисел без перехода через разряд нужно перейти к сложению чисел с нулями в слагаемых, а затем к сложению, с переходом через разряд, вводя здесь различные варианты примеров, о которых говорилось выше.

Сложение чисел с нулём нужно пояснить на отдельных примерах: $6 + 0 = 6$; $0 + 8 = 8$. Сложение любого числа с нулём и нуля с любым числом всегда даёт это же число.

Весьма полезно прорешать несколько таких примеров, в которых второе слагаемое больше первого, например: $7\,624 + 128\,259$. Правильная подпись второго слагаемого под первым заставляет ученика обращать внимание на значение каждой цифры в числе, на разряды числа.

Каждая новая разновидность примеров решается сначала с подробными пояснениями: называются разрядные единицы слагаемых, разряды полученной суммы, поясняется превращение низших разрядов в следующие высшие. Но когда смысл операции выяснен и ученики переходят к тренировке, пояснения даются самые краткие.

Решим пример: $+\begin{array}{r}6\,875\\4\,368\\\hline\end{array}$ с подробными и краткими пояснениями. «5 ед. да 8 ед.— 13 ед.; 13 ед. составляют 3 ед. и 1 дес., 3 ед. пишем, а 1 дес. прибавим к десяткам. 1 десяток да 7 дес. — 8 дес. да 6 дес. — 14 дес.; 14 дес. составляют 4 дес. и 1 сотню, 4 дес. пишем под десятками, а 1 сотню запомним и прибавим к сотням» и т. д.

Краткие пояснения того же примера: «5 да 8 — 13, 3 пишу, 1 — в уме. 1 да 7 — 8 да 6 — 14. 4 пишу, 1 — в уме и т. д.

Завершающим моментом в формировании навыков сложения являются упражнения в сложении нескольких чисел — трёх, четырёх, пяти. Увеличение числа слагаемых заставляет ученика выйти за пределы таблицы сложения и тренироваться в складывании двузначных чисел с однозначными в пределе 30, 40 и далее. Всё это обогащает навык сложения и делает его более совершенным. Особенно полезно решение таких примеров, где слагаемые записаны в строчку, а ученику приходится располагать их столбиком. Это заставляет ученика анализировать состав числа, определять разряд каждой цифры, приводить в соответствие одноимённые разряды разных слагаемых.

Записывая слагаемые столбиком, полезно располагать их в порядке убывания количества цифр в слагаемых. Так, пример 619 + 3945 + 76 + 48706 целесообразно переписать так:

```
  48 706
   3 945
+    619
      76
────────
```

Чтобы перестановка слагаемых производилась при этом осмысленно, нужно предпослать упражнению в этом навыке повторение переместительного свойства сложения: «От перестановки слагаемых сумма не изменяется».

При сложении надо соблюдать следующее правило: сложив единицы всех слагаемых в указанном примере (6 + 5 + 9 + 6) и получив в сумме 26, нужно 6 единиц записать, а с двух десятков начинать сложение десятков (2 + 0 + 4 + 1 + 7). Получив при суммировании десятков «14», нужно «4» подписать под десятками, а одну сотню — не запоминать, а сразу прибавить её к сотням (1 + 7 + 9 + 6) и т. д. Такой порядок поможет устранить часто наблюдающуюся ошибку, которая заключается в том, что удерживаемая в уме цифра забывается.

Проверку сложения нужно производить двояко: путём повторного сложения и путём сложения слагаемых в ином порядке (снизу вверх).

Решение примеров должно сопровождаться решением задач, в которых навык сложения получает свое практическое применение.

Примерная контрольная работа.

Примеры:

1) 4 875 + 2 968
2) 950 806 + 57 204
3) 78 706 + 6 834 + 354 948.

Задача. «С одного участка сняли 3 480 *кг* картофеля, с другого на 360 *кг* больше, а с третьего столько, сколько с первых двух вместе. Сколько всего картофеля собрали с трёх участков?»

Для изучения сложения, как показывает опыт многих школ, достаточно 6—7 уроков.

ВЫЧИТАНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ.

Для успешного формирования навыков письменного вычитания от учащихся требуется твёрдое знание таблицы вычитания и хорошее знание нумерации многозначных чисел (знание единичного отношения смежных разрядов и уменье быстро раздроблять одни разрядные единицы в другие).

Система изучения вычитания. Изучение вычитания может идти по следующим основным ступеням:

а) цифры уменьшаемого больше соответствующих цифр вычитаемого (4 875 — 1 634);

б) в вычитаемом встречаются нули (26 708—4 005);

в) в уменьшаемом имеется один нуль (3 608 — 2 456);

г) в уменьшаемом некоторые цифры меньше соответствующих цифр вычитаемого (7 235 — 1 876);

д) в уменьшаемом имеются подряд два или несколько нулей (180 004 — 9 765).

Каждая ступень имеет свои варианты, которые должны быть отражены в упражнениях. Так, уменьшаемое и вычитаемое могут иметь одинаковое или разное количество цифр; числа могут быть различной значности.

В последней ступени «д» примеры различаются по количеству нулей в уменьшаемом и по их расположению среди значащих цифр; особого внимания заслуживает пример, в котором в уменьшаемом среди нулей встречается единица (900 100 — 68 724).

Разнообразие случаев вычитания при единстве принципа их решения сильнее подчёркивает в сознании учащихся этот принцип: строгую поразрядность вычитания.

Формирование навыка письменного вычитания. Как и в сложении, при обучении письменному вычитанию сначала нужно распространить навык вычитания первых трёх разрядов на единицы высших разрядов; это делается при помощи устных упражнений: 9 тыс.— 6 тыс.; 17 сот. тыс.— 9 сот. тыс. и т. д.

Первый шаг в образовании навыка письменного вычитания многозначных чисел — это объяснение того случая вычитания, когда все разрядные единицы уменьшаемого больше соответствующих единиц вычитаемого:

$$\begin{array}{r@{\ }l} _{-}\,9\,786 & \text{— уменьшаемое} \\ 2\,563 & \text{— вычитаемое} \\ \hline 7\,223 & \text{— остаток или разность.} \end{array}$$

На этом примере учитель знакомит учащихся с названиями чисел в вычитании и с порядком записи этого действия, формулируя соответствующее правило вычитания.

Название чисел объясняется на задачах. Например: «В мешке было 50 *кг* картофеля. Из них 28 *кг* израсходовали. Сколько килограммов картофеля осталось?» Задача решается вычитанием: 50 *кг* — 28 *кг* = 22 *кг*. От 50 отняли 28. Число 50 уменьшилось; это число называется уменьшаемым. Число 28 мы вычли. Это число называется вычитаемым. Осталось 22 *кг*. Число 22 называется остатком.

«Отцу 40 лет. Сыну 15 лет. На сколько лет отец старше сына?» Задача решается вычитанием. 40 л. — 15 л. = 25 л. Здесь 40 — уменьшаемое, 15 — вычитаемое. Число 25 показывает на сколько 40 больше 15. Поэтому число 25 можно назвать разностью. Так объясняется двоякое название результата вычитания — «остаток или разность».

Для закрепления терминологии вычитания полезны устные

упражнения в решении примеров: «Уменьшаемое 100, вычитаемое 60. Найти остаток. Уменьшаемое 18, вычитаемое 9. Чему равна разность? Найти разность чисел 30 и 18; 48 и 16» и т. д.

Для тренировки в правильном подписывании вычитаемого под уменьшаемым полезно давать уменьшаемое и вычитаемое с разным количеством цифр (17 654 — 728; 621 316 — 4 826).

Вслед за этим нужно включить нуль в вычитаемое, чтобы учащиеся встретились со случаями вычитания нуля из числа и нуля из нуля (7 — 0; 0 — 0). «Если от числа ничего не отнимается, то и остаётся то же число»,— так поясняется решение примера 7 — 0 = 7.

Дальнейшее развитие навыка вычитания требует ознакомления учащихся с тем случаем этого действия, когда некоторые разрядные единицы уменьшаемого меньше соответствующих разрядов вычитаемого. Это основной случай вычитания и ему должно быть уделено больше места и времени.

Первые примеры на этот случай вычитания решаются с подробными объяснениями.

Возьмём пример:

$$\begin{array}{r} -\ 6\,427 \\ 2\,938 \\ \hline 3\,489 \end{array}$$

Решая этот пример, ученик говорит: «От 7 ед. нельзя отнять 8 ед. Занимаем 1 дес. В десятке 10 ед., да 7 ед. — будет всего 17 ед. От 17 ед. отнять 8 ед. будет 9 ед. От 1 дес. отнять 3 дес. нельзя. Занимаем 1 сотню и раздробляем её в десятки. В сотне 10 дес. да 1 дес. в числе, всего 11 дес. От 11 дес. отнять 3 дес., получится 8 дес. Отнимаем дальше сотни» и т. д.

В упражнениях нужно ограничиться только краткими пояснениями: «От 7 отнять 8 нельзя. Занимаем 1 дес. От 17 отнять 8, будет 9. От 1 дес. отнять 3 дес. нельзя. Занимаем сотню. От 11 отнять 3 будет 8. От 8 отнять 9 нельзя» и т. д.

Над тем разрядом, у которого занимается единица, ставится точка. Примеры этой категории постепенно усложняются: сначала берутся примеры, где только единицы уменьшаемого меньше единиц вычитаемого, потом — где и единицы и десятки уменьшаемого меньше единиц и десятков вычитаемого, затем — такие примеры, где единицы, десятки и сотни уменьшаемого меньше соответствующих разрядов вычитаемого и т. д.

На последнем этапе вводятся в уменьшаемое нули — сначала один, а затем несколько нулей подряд. На этом этапе вычитания ученику приходится производить многократное последовательное раздробление занятой единицы. Пояснения, даваемые учителем, должны быть особенно чётки, ясны и последовательны.

В отдельных случаях может потребоваться применение наглядного пособия для совершенно конкретного показа процесса последовательного раздробления занятой единицы. Таким пособием может служить пучок, состоящий из 1 000 палочек. Пусть требуется из 1 000 вычесть 325. Берём пучок «1 000», состоящий из 10 сотен, из которых каждая, в свою очередь, состоит из

10 десятков палочек. Помещаем её в фанерный ящик с четырьмя отделениями по числу первых четырёх разрядов. Передняя сторона ящика должна быть открытой, чтобы дети могли видеть, как сначала «развязывается» 1 000, распадающаяся на 10 пучков сотен, как потом 9 сотен оставляются на месте сотен, а одна сотня развязывается, распадаясь на 10 десятков, и т. д. Так дети наглядно видят, как из 1 000 получилось 9 сот. 9 дес. и 10 ед. После этого им показывается письменное вычитание:

$$\begin{array}{r} -\ 1\,000 \\ 325 \\ \hline \end{array}$$

Кроме палочек, для этой цели могут быть использованы и классные счёты.

Таких примеров надо решить достаточно большое количество, чтобы создать навык безошибочного их решения.

Проверка вычитания производится на основе понимания связи вычитания со сложением. На примерах и задачах устанавливается, что если к вычитаемому прибавить остаток, то получится уменьшаемое. Отсюда, чтобы проверить результат вычитания, надо к вычитаемому прибавить остаток; если при этом получится уменьшаемое, то вычитание сделано верно. Для упражнений в проверке ученикам даются примеры с готовыми ответами; из них один-два могут быть неверными. Ученики должны обнаружить ошибку и исправить её.

Примерная контрольная работа.

Примеры.

а) Общий случай вычитания: $-\begin{array}{r} 5\,248 \\ 2\,463 \\ \hline \end{array}$

б) Нули в вычитаемом: $-\begin{array}{r} 15\,071 \\ 6\,001 \\ \hline \end{array}$

в) Нули в уменьшаемом: $-\begin{array}{r} 80\,040 \\ 59\,236 \\ \hline \end{array}$

г) Разновидность предыдущего примера $-\begin{array}{r} 500\,100 \\ 79\,436 \\ \hline \end{array}$

д) Проверить: 9 486 — 4 273 = 5 213.

Задача: «С одного участка собрали 8 400 *кг* картофеля, с другого — на 3 200 *кг* меньше. С первого участка увезли 4 100 *кг*, со второго 2 800 *кг*. На сколько больше осталось картофеля на первом участке, чем на втором?»

УМНОЖЕНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ.

Техника письменного умножения во много раз сложнее техники письменного сложения и вычитания, и овладение ею — процесс более длительный и трудный для ученика по сравнению с двумя предыдущими действиями. Правило умножения многозначных чисел — сложное: в то время как сложение и вычитание произ-

водятся по одному правилу, в умножении отдельные частные случаи имеют свои особые правила, которые ученик должен знать. Усложнение механизма умножения многозначных чисел связано прежде всего с усложнением множителя: множителем может быть — однозначное число, десять, круглые десятки, двузначное число, сто, круглые сотни, трёхзначное число. Каждый из последующих множителей несколько усложняет умножение по сравнению с предыдущим. Некоторое усложнение вносят в процесс умножения нули во множимом, во множителе, в обоих сомножителях вместе — нули в середине, нули в конце сомножителей, нули и в середине и в конце сомножителей. При таком положении строгая система в расположении материала является необходимым и весьма существенным условием для успешного обучения учащихся этому арифметическому действию. Кроме того, для успешного изучения умножения многозначных чисел ученики должны твёрдо знать таблицу умножения; малейшие недочёты в знании таблицы умножения будут тяжело отражаться на получении правильных результатов умножения. Поэтому, прежде чем приступить к умножению многозначных чисел, нужно проверить знание учащимися таблицы умножения и повторить её. Культура записей (порядок, форма, чёткость и др.), важная сама по себе в арифметике, здесь приобретает особенно большое значение: рациональная форма записи может намного облегчить самый процесс умножения и получение правильного результата и, наоборот, нерациональная запись затрудняет умножение и часто ведёт к ошибкам. На эту сторону вопроса учитель должен обратить особое внимание, давая ученикам наиболее совершенные образцы записей и настойчиво добиваясь от учащихся следования этим образцам.

1. Умножение на однозначное число.

Объяснение письменного умножения на однозначное число начинается с повторения простейшего случая умножения в пределах тысячи, когда от умножения каждого разряда множимого в произведении получаются числа, меньшие десятка (324×2). Здесь вводятся названия чисел в умножении: множимое, множитель, произведение. Затем учитель переходит к большим числам — четырёхзначным и пятизначным ($14\,234 \times 2$); решив небольшое количество таких примеров, учитель переходит к примерам, в которых при умножении сначала одного, а потом двух, трёх разрядов и больше получаются числа, большие десяти; например:

$$13\,219 \times 3;\ 6\,943 \times 8;\ 28\,758 \times 4.$$

Первые примеры решаются с подробным объяснением.

Так, решая пример $\frac{\begin{array}{r}6\,946\\ \times\ 4\end{array}}{27\,784}$, ученик говорит: «Умножаем 6 единиц на 4, получается 24 единицы; 4 пишем, 2 десятка прибавим к десяткам; 4 десятка умножим на 4, получается 16 десятков, да 2 десятка, полученные от умно-

жения единиц,— 18 десятков; 8 десятков пишем, а одну сотню прибавим к сотням. 9 сотен умножить на 4, получится 36, да 1 сотня — 37 сотен; 7 сотен пишем, а 3 тысячи прибавим к тысячам. 6 тысяч умножить на 4, получится 24 тысячи, да 3 тысячи, полученные от умножения сотен, будет 27 тысяч; пишем 27. В произведении получилось 27 784».

В дальнейшем от подробной формы объяснения надо перейти к краткой, а именно:

«Четырежды 6—24, 4 пишу, 2 — в уме; четырежды четыре — 16, да 2 — 18, 8 пишу, а 1 — в уме; четырежды девять — 36, да 1 — 37» и т. д.

С переходом к такой лаконической форме объяснения торопиться не следует; пусть дети поупражняются в назывании разрядов, разбивая множимое на разрядные числа, поупражняются в превращении одних разрядных чисел в другие (например 32 сотни = 2 сотням и 3 тысячам). Всё это углубляет понимание учениками сущности производимых операций.

Особую разновидность примеров составляют те, в которых во множимом встречаются нули в середине числа, например: 6 402 × 4; 3 409 × 2.

Как производить умножение в таких случаях? Некоторые методисты рекомендуют не умножать 0 на число.

Первый пример они рекомендуют объяснить так:

$$\begin{array}{r} 6\,402 \\ \times\ 4 \\ \hline 25\,608 \end{array}$$

«4 раза по 2, будет 8; десятков нет, пишем на месте десятков 0; 4 раза по 4 — 16; 6 пишем, 1—в уме; 4 раза по 6, будет 24, да 1 — 25; пишем 25. Получилось произведение 25 608».

Второй пример объясняется так:

$$\begin{array}{r} 3\,409 \\ \times\ 2 \\ \hline \end{array}$$

«Дважды 9 — 18; 8 пишем, 1—в уме; десятков нет, поэтому их не умножаем, но от умножения единиц получился 1 десяток; пишем на месте десятков 1» и т. д.

Такое объяснение возможно, но оно неудобно; в нём нет ритма, нет непрерывности в объяснении, и, кроме того, оно приводит некоторых учеников к ошибке такого рода: $\begin{array}{r} 604 \\ \times 4 \\ \hline 256 \end{array}$. Здесь ученик произвёл умножение, не обращая внимания на нуль.

С нулём надо поступать так же, как и с другими числами.

На отдельных примерах умножения нуля на однозначное число (0×5) нужно пояснить, что если мы умножаем 0 на какое-либо число, то в произведении получается 0 (0 × 4 = 0; 0 × 8 = = 0 и т. д.). Почему? Умножить 0 на 4, это значит 0 повторить слагаемым 4 раза: 0 + 0 + 0 + 0, что в сумме даст 0. К пониманию такого объяснения дети III класса подготовлены. После этого решение примера $\begin{array}{r} 3\,409 \\ \times\ 2 \\ \hline \end{array}$ сопровождается следующим пояснением:

«Дважды 9—18; 8 пишу, 1 — в уме. Дважды 0—0, да 1 будет 1. Дважды 4 — 8. Дважды 3 — 6. Получилось 6 818».

Несколько примеров и задач следует решить с **перестановкой сомножителей**. Учащимся нужно напомнить, что от перестановки сомножителей произведение не изменяется:

$$4 \times 25 = 25 \times 4 = 100; \quad 40 \times 5 = 5 \times 40 = 200.$$

Пусть дано, например, решить задачу: «В магазине было 685 *м* материи по 9 руб. за метр и 535 *м* по 7 руб. за метр. Сколько стоила вся материя?»

Решение.	Вычисления.
1) 9 руб. × 685 = 6 165 руб. 2) 7 руб. × 535 = 3 745 руб. 3) 6 165 руб. + 3 745 руб. = 9 910 руб.	1) $\begin{array}{r} 685 \\ \times\ 9 \\ \hline 6\,165 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 535 \\ \times\ 7 \\ \hline 3\,745 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} +\ 6\,165 \\ 3\,745 \\ \hline 9\,910 \end{array}$

Записывая решение в строчку, ученик рассуждает так: «Один метр материи стоит 9 руб., а 685 *м* стоят в 685 раз больше; нужно 9 руб. умножить на 685. Один метр материи второго сорта стоит 7 руб., а 535 *м* такой материи стоят в 535 раз больше; чтобы узнать её стоимость, нужно 7 руб. умножить на 535». Здесь запись действия вытекает из рассуждения.

Но, вычисляя, ученик, вместо того чтобы умножить 9 руб. на 685, может умножить, наоборот, 685 на 9 (здесь уже наименование не ставится); так умножать легче, а результат получится тот же, ибо от перестановки сомножителей произведение не изменяется.

Вводя практику перестановки сомножителей, ученикам надо показать на двух-трёх примерах, как же производится умножение без перестановки, когда множимое — число однозначное, а множитель — многозначное:

$$\begin{array}{r} \times\ 6 \\ 8\,423 \\ \hline 50\,538 \end{array}$$

После решения достаточно большого количества примеров выводится правило: «Чтобы умножить многозначное число на однозначное, нужно умножить каждый разряд множимого на однозначное число, начиная с единиц».

Умножение чисел, оканчивающихся нулями.

Пусть дано умножить: 1) 275 000 × 3; 2) 347 800 × 4.

$\begin{array}{r} 275 \\ \times\ 3 \\ \hline 825 \end{array}$ **Учитель**: Прочитайте первый пример (275 тысяч умножить на 3). Умножим 275 на 3. Запишем как всегда. Получилось 825. Но нам надо умножить на 3 не 275 **единиц**, а 275 **тысяч**. Запишем умножение так, чтобы было видно, что мы умножаем тысячи и получаются в произведении тоже тысячи.

$$\begin{array}{r} \times\ 275 \text{ тысяч} \\ 3 \qquad \\ \hline 825 \text{ тысяч} \end{array}$$

«Как можно записать этот пример иначе, без слова «тысяч»? (Вместо слова «тысяч» написать три нуля.)

«Перепишем решение нашего примера, написав нули вместо слова «тысяч». Получается такая запись:

$$\begin{array}{r} \times\ 275\,000 \\ 3 \\ \hline 825\,000 \end{array}$$

Последняя запись делается учениками в своих тетрадях.

«Решим ещё один пример: 347 800 × 4. Прочитайте пример. Сколько сотен во множимом? Прочитайте пример, выразив множимое в сотнях».

(3 478 сотен умножить на 4.) «Умножим 3 478 на 4:

$$\begin{array}{r} 3\,478 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 13\,912 \end{array}$$

Нам нужно было умножить 3 478 не единиц, а сотен. Запишем так, чтобы было видно, что умножаются сотни и в произведении получаются тоже сотни».

$$\begin{array}{r} \times\ 347\,800 \\ 4\ \ \ \ \\ \hline 1\,391\,200 \end{array}$$

Делаем обобщение, вывод: «В первом и во втором примерах множимое оканчивалось нулями. Как мы производили умножение в таких случаях? Где подписывали множитель?» (Под значащей цифрой.) «Где при этом оставались нули?» (Нули оставались в стороне, вправо от множителя.) «Что в конце делали с этими нулями?» (Приписывали их к произведению.)

Правило формулируется примерно так: «Если множимое оканчивается нулями, то множитель подписывают так, чтобы нули оставались вправо от него. Умножают, не обращая внимания на нули. Затем к полученному произведению приписывают столько нулей, сколько их во множимом».

2. **Умножение на число, выраженное единицей с нулями (10; 100; 1 000).**

Умножение на 10. Объяснение умножения на 10 начинается с повторения умножения на 10 однозначных и двузначных чисел: при умножении единицы на 10 получается десять. Решается ряд примеров с записью действия в строчку. Получается табличка:

$$\begin{array}{ll} 2 \times 10 = 20 & \qquad 15 \times 10 = 150 \\ 5 \times 10 = 50 & \qquad 36 \times 10 = 360 \end{array}$$

В каждом примере сравнивают множимое и произведение. Устанавливается, что эти числа отличаются одно от другого тем, что в произведении справа стоит нуль.

От приписывания нуля справа число увеличилось в 10 раз: в самом деле, было 2 единицы, стало 2 десятка; в числе 36 было 6 единиц, стало 6 десятков, было 3 десятка, стало 3 сотни.

Каждое разрядное число множимого увеличилось в 10 раз, и всё число 36 увеличилось в 10 раз.

Делается вывод: «Чтобы умножить число на 10, достаточно приписать к нему справа нуль». Некоторые ученики, формулируя это правило, по ошибке говорят: «прибавить нуль». Ошибку надо разъяснить: от прибавления нуля число не изменяется; 36 + 0 будет 36, а от приписывания нуля справа число увеличивается в 10 раз.

На основе выведенного правила решается несколько примеров: 345 × 10; 100 × 10; 560 × 10; 7 486 × 10; 1 000 × 10; 9 600 × 10; 7 004 × 10 и т. п.

Умножение на 100 и 1 000.

При умножении каждой единицы на 100 получается сотня. Поэтому

1 × 100 = 100	16 × 100 = 16 сотен = 1 600
5 × 100 = 500	37 × 100 = 37 сотен = 3 700
9 × 100 = 900	128 × 100 = 128 сотен = 12 800

Сравниваем в каждом примере множимое и произведение (1 и 100, 9 и 900, 37 и 3 700), и видим, что эти числа отличаются одно от другого тем, что в произведении стоят справа два нуля. Что делает с числом приписывание к нему двух нулей? Приписывание двух нулей справа увеличивает число в 100 раз. В самом деле: когда 37 умножили на 100, получили 3 700; сравним 37 и 3 700. В числе 37 — 7 были единицами, а в 3 700 — 7 стали сотнями; 3 в числе 37 были десятками, а в числе 3 700 они стали тысячами. Каждое разрядное число увеличилось в 100 раз; следовательно, и всё число увеличилось в 100 раз.

Выведем правило: «Чтобы умножить число на 100, надо приписать к нему справа два нуля».

По этому образцу выводится правило умножения на 1 000, и решаются соответствующие примеры.

Наконец, три вышеуказанных частных вывода объединяются в одно общее правило: «Чтобы умножить число на единицу с нулями, достаточно приписать к множимому столько нулей, сколько их во множителе».

На основе этого правила решаем ряд примеров на умножение на 10, 100, 1 000. Некоторые из примеров подробно разбираются: берётся одна и та же цифра, и определяется её значение во множимом и в произведении.

Несколько примеров решается с перестановкой сомножителей: 45 × 100 и 100 × 45; 308 × 100 и 100 × 308.

Умножение на 10, 100 и 1 000 записывается в строчку и только в строчку: 24 × 100 = 2 400.

3. Умножение на число, выраженное значащей цифрой с нулями (30, 600, 8 000).

Умножение на круглые десятки. Устное умножение на круглые десятки выполняется двумя последовательными умножениями: на число десятков и на 10; например: 6×30=6×3×10=180 (см. стр. 256).

Переход к письменному умножению на круглые десятки нужно начать с повторения устного умножения на 20, 30, 40 и т. д.

$$3 \times 50 = (3 \times 5) \times 10 = 150$$
$$12 \times 40 = (12 \times 4) \times 10 = 480$$
$$54 \times 30 = (54 \times 3) \times 10 = 1620$$

Чем больше числа, тем всё труднее и труднее становится вычислять устно. Поэтому будем записывать умножение «столбиком».

Пусть дано умножить 26 на 80. Чтобы умножить на 80, надо умножить 26 сначала на 8, а потом полученное число ещё на 10. Это можно записать так:

$$\begin{array}{r} \times\ 26 \\ 80 \\ \hline 2080 \end{array}$$

Умножая 26 на 80, умножим 26 на 8, получим 208. Теперь 208 нужно умножить на 10, но для этого достаточно к нему приписать справа 0. Получим 2 080.

Решаем ещё несколько примеров, беря в качестве множимого всё большие и большие числа:

$$\begin{array}{r} 496 \\ \times\ 30 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15\,968 \\ \times\ 50 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 905\,785 \\ \times\ 80 \\ \hline \end{array}$$

Умножая 15 968 на 50, ученик рассуждает так: чтобы умножить 15 968 на 50, нужно умножить это число на 5 и к произведению приписать справа нуль. Получится 798 400:

$$\begin{array}{r} 15\,968 \\ \times\ 50 \\ \hline 798\,400 \end{array}$$

Выводится правило: «Чтобы умножить число на круглые десятки, нужно умножить его на цифру десятков и к полученному произведению приписать нуль».

На основе правила решаются всё более и более сложные примеры: а) 94×70; б) 100×50; 285×90; 304×70; в) 2 300×80; 4 765×30; г) 60×6 784.

Умножение на круглые сотни. Решим задачу: «В школе 300 учащихся; каждому ученику выдали по 2 тетради. Сколько тетрадей выдали всем учащимся?» Чтобы решить эту задачу, нужно взять 300 раз по 2, или 2 умножить на 300. Как взять 300 раз по 2? Можно взять 100 раз по 2, ещё 100 раз по 2 и ещё 100 раз по 2, получится 200 + 200 + 200 = 600.

Как иначе можно по 2 взять 300 раз? Можно по 2 взять 3 раза и 3 двойки (2×3) повторить 100 раз, а всего мы возьмём 300 двоек, и получится 600.

Запишем это умножение: $2 \times 300 = (2 \times 3) \times 100 = 6 \times 100 = 600$.

Умножим 4 на 200. Как взять 200 раз по 4? Можно взять 2 раза по 4 и эти две четвёрки повторить 100 раз:

$$4 \times 200 = (4 \times 2) \times 100 = 8 \times 100 = 800.$$

Умножим 6 на 500: $6 \times 500 = (6 \times 5) \times 100 = 3\,000$.

Сделаем обобщение: чтобы умножить на круглые сотни (на 200, 400, 500 и др.), мы умножали число на цифру сотен и потом ещё на 100.

Перейдём теперь к письменному умножению. Умножим 56 на 700. Запишем это умножение «столбиком».

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times\ 700 \\ \hline 39\,200 \end{array}$$

Чтобы умножить 56 на 700, умножим 56 на 7 и полученное произведение умножим ещё на 100. Но чтобы умножить на 100, достаточно приписать к числу два нуля. Поэтому, чтобы умножить 56 на 700, умножим 56 на 7 и к полученному произведению припишем два нуля.

Решим ещё несколько примеров и выведем правило: «Чтобы умножить число на круглые сотни, надо умножить его на цифру сотен и к полученному произведению приписать два нуля». После решения нескольких примеров на умножение на круглые тысячи, обобщим все три выведенные правила в следующей формулировке: «Чтобы умножить число на значащую цифру с нулями, нужно умножить число на значащую цифру и к полученному произведению приписать столько нулей, сколько их во множителе». Это правило закрепляется на решении примеров и задач.

4. Умножение на двузначные и трёхзначные числа.

Объяснение приёма умножения на двузначное число начинается с решения примера

$$8 \times 25 =$$

Умножим 8 сначала на 20, потом на 5

$$8 \times 25 = 8 \times 20 + 8 \times 5 = 160 + 40 = 200.$$

Сделаем умножение в обратном порядке:

$$8 \times 25 = 8 \times 5 + 8 \times 20 = 40 + 160 = 200.$$

Таким образом, при умножении на двузначное число, данное число умножается сначала на единицы, потом на десятки.

Теперь можно перейти к объяснению письменного умножения.

Умножим 48 на 26. Для этого надо умножить 48 на 20, потом 48 на 6 и полученные произведения сложить. Выполняем умножение:

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times\ 20 \\ \hline 960 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 48 \\ \times\ 6 \\ \hline 288 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 960 \\ +\,288 \\ \hline 1\,248 \end{array}$$

Но это умножение можно выполнить и в другом порядке:

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times\ 6 \\ \hline 288 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 48 \\ \times\ 20 \\ \hline 960 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 288 \\ +\,960 \\ \hline 1\,248 \end{array}$$

Эти три действия можно записать короче, в одном месте, а именно:

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times\ 26 \\ \hline +\,\begin{array}{r} 960 \\ 288 \end{array} \\ \hline 1\,248 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} 48 \\ \times\ 26 \\ \hline +\,\begin{array}{r} 288 \\ 960 \end{array} \\ \hline 1\,248 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} 48 \\ \times\ 26 \\ \hline +\,\begin{array}{r} 288 \\ 96 \end{array} \\ \hline 1\,248 \end{array}$$

Здесь 48 — множимое, 26 — множитель, 288 — первое неполное произведение, 960 — второе неполное произведение, 1 248 — полное произведение.

Решим ещё два примера, делая сначала подробную запись в виде трёх действий, а потом сокращённую запись в виде одного действия, и после этого окончательно остановимся на общепринятой сокращённой записи.

Умножение на двузначное число дети сопровождают следующим объяснением:

Умножим 478 на 36. Подпишем множитель под множимым так, чтобы единицы стояли под единицами, десятки под десятками. Подведём черту, слева поставим знак умножения и начнём умножать 478 на единицы — на 6.

$$\begin{array}{r} 478 \\ \times\ \ 36 \\ \hline 2\,868 \\ 14\,34 \\ \hline 17\,208 \end{array}$$

Шестью восемь — 48, 8 пишем, 4 — в уме; шестью семь — 42, да 4 — 46; 6 пишем, 4 — в уме; шестью четыре — 24, да 4 — 28; пишем 28.

Теперь умножим 478 на десятки — на 3. Трижды восемь — 24; 4 десятка пишем под десятками, 2 сотни в уме; трижды семь — 21, да 2 — 23; 3 пишем, 2 — в уме. Трижды четыре — 12, да 2 — 14; пишем 14. Сложим неполные произведения — 2 868 и 1 434 десятка. В произведении получилось 17 208.

В заключение полезно спросить: из двух неполных произведений какое больше — первое или второе; как читается второе неполное произведение (14 340 или 1 434 десятка).

Для того, чтобы закрепить знание переместительного закона умножения, полезно и здесь решить несколько примеров с перестановкой сомножителей: 17×96 и 96×17; 23×368 и 368×23.

Умножение на трёхзначное число. Пусть дано умножить 826 на 432. Применим тот же аналитический приём, который мы использовали при объяснении умножения на двузначное число.

Умножить 826 на 432 — это значит по 826 взять 432 раза. Как 826 взять 432 раза? — Взять 400 раз, потом 30 раз и, наконец, ещё 2 раза; затем полученные произведения сложить. Или наоборот: взять 2 раза, 30 раз и 400 раз.

Выполняем умножение:

$$\begin{array}{r} 826 \\ \times\ \ \ 2 \\ \hline 1\,652 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 826 \\ \times\ \ 30 \\ \hline 24\,780 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 826 \\ \times\ 400 \\ \hline 330\,400 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,652 \\ +\ 24\,780 \\ 330\,400 \\ \hline 356\,832 \end{array}$$

Запишем эти действия короче в одном месте:

$$\begin{array}{r} 826 \\ \times\ 432 \\ \hline 1\,652 \\ +\ 24\,780 \\ 330\,400 \\ \hline 356\,832 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} 826 \\ \times\ 432 \\ \hline 1\,652 \\ +\ 24\,78 \\ 330\,4 \\ \hline 356\,832 \end{array}$$

На последней записи остановимся и будем ею всегда пользоваться.

Разберём её. Здесь 826 — множимое, 432 — множитель, 1 652—

первое неполное произведение; 2 478 десятков, или 24 780 — второе неполное произведение; 3 304 сотни, или 330 400 — третье неполное произведение; 356 832 — полное произведение. Выясним, почему во втором неполном произведении цифра 8 написана под цифрой 5, а в третьем неполном произведении цифра 4 подписана под цифрой 7.

5. **Умножение на число с нулями в середине** (208; 3 004 и др.).

Умножим 296 на 304.

Умножить 296 на 304 — это значит по 296 взять 304 раза. Для этого 296 возьмём сначала 4 раза или умножим на 4, а потом 300 раз, или умножим на 300. Запишем множитель под множимым и произведём действие. Умножим 296 на 4. Получим 1 184.

```
    296
  × 304
  -----
   1 184
  88 8
  ------
  89 984
```

На десятки число не умножаем; десятков нет, на их месте стоит нуль.

Умножаем дальше число на сотни.

Первую полученную от умножения на 3 цифру подпишем под сотнями, чтобы она обозначала сотни. Трижды шесть — 18 сотен (так как умножаем на 3 сотни); 8 сотен пишем под сотнями, а 1 тысяча — в уме; трижды девять — 27 да 1 — 28; 8 пишем, 2 — в уме; трижды два — 6, да 2 — 8.

Сложим неполные произведения: 1 184 + 88 800 = 89 984.

По окончании решения примера ставим вопросы: «В каком порядке произвели умножение? Почему не умножали на десятки? Почему цифру 8 подписали под сотнями? Как можно было бы ещё написать второе неполное произведение? (С двумя нулями.) Запишите иначе это второе произведение».

Дальше надо решить достаточное количество аналогичных примеров. Среди примеров должны быть и такие, у которых множители с двумя нулями в середине, например 6 004.

6. **Умножение, когда оба сомножителя оканчиваются нулями.**

Пусть дано множить 46 800 на 70. Рассуждаем так: множимое 468 сотен. Множитель 7 десятков. Чтобы умножить 468 сотен на какое-нибудь число, надо умножить на него 468 и потом приписать к произведению два нуля. А чтобы умножить на 7 десятков, надо умножить на 7 и потом приписать нуль. Итак, множим 468 на 7 и к полученному произведению приписываем два нуля и один нуль, всего три нуля.

В ходе объяснения постепенно получаются записи: а) умножаем 468 на 7; б) умножаем 46 800 на 7; в) умножаем 46 800 на 70:

```
   468        46 800        46 800
 ×   7      ×  7          ×     70
 -----      -------       ---------
 3 276      327 600       3 276 000
```

Последняя запись (в) заносится учениками в тетради: первые же две имеют методическое значение.

Рассмотрев ещё 2—3 примера (320 × 4 900; 6 300 × 2 700), можно сформулировать правило, состоящее из двух частей: 1-я часть, в которой говорится о том, как подписываются сомножители, оканчивающиеся нулями: «Чтобы перемножить числа, оканчивающиеся нулями, нужно подписать значащие цифры под значащими, а нули оставить в стороне».

2-я часть правила, говорящая о том, как перемножить эти числа: «После этого перемножают значащие цифры и к полученному произведению справа приписывают столько нулей, сколько их во множимом и множителе вместе».

Примерные контрольные работы.

Изучение умножения вместе с решением задач требует около 28 уроков. За это время нужно провести две контрольные письменные работы; одну — после изучения умножения на однозначное число, на единицу с нулями и на круглые числа; другую — по окончании работы над умножением.

В содержание первой контрольной работы должны войти:

$$\begin{array}{r} 8649 \\ \times\ \ 7 \\ \hline \end{array}$$

1) Общий случай умножения на однозначное число; например: (против каждого числа учащиеся должны написать название чисел в умножении).

2) Умножение числа с нулями в середине; например: 9007 × 8

3) Умножение числа с нулями на конце; например: 498 000 × 6

4) Число 254 увеличить в 100 раз.

5) Умножение числа на круглые сотни; например: 635 × 900.

6) Задача: «Магазин продал 324 *м* ситца по 6 руб. за метр и 156 *м* полотна. Метр полотна стоил в 3 раза дороже метра ситца. Сколько рублей получил магазин за ситец и полотно вместе?»

Все примеры (за исключением первого) даются записанными в строчку: ученики же должны записать их столбиком (за исключением 4-го примера) и решить.

В задаче проверяется уменье применить умножение в двух основных случаях, уменье пользоваться переместительным свойством умножения и правильно ставить наименование.

В содержание второй контрольной работы должны войти:

1) Общий случаи умножения; например: 358 × 746.

2) Умножение чисел с нулями в середине; например: 6 004 × 308.

3) Умножение чисел, оканчивающихся нулями; например: 480 × 5 700.

4) Составить задачу в 1—2 действия, в которой данное число надо увеличить в несколько раз.

При проверке контрольной работы надо выявить результаты по каждому примеру в отдельности.

ДЕЛЕНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ.

Письменное деление наряду с умножением принадлежит к числу более трудных арифметических действий.

От учащихся, приступающих к изучению техники письменного деления, требуется:

а) хорошее знание нумерации многозначных чисел — знание десятичного состава числа и уменье выделять из числа все единицы данного разряда; б) уменье безошибочно и быстро производить

умножение на однозначное число и вычитание многозначных чисел; в) хорошие навыки устного счёта — уменье быстро умножать двузначные и трёхзначные числа на однозначные; г) понимание связи между умножением и делением.

В основу системы изучения письменного деления должна быть положена числовая структура делителя. В соответствии с этим изучение деления может идти по следующим ступеням:

1. Деление многозначного числа на однозначное.
2. Деление на число, выраженное единицей с нулями.
3. Деление на круглые числа.
4. Деление на двузначное число с подготовительными к нему упражнениями в делении трёхзначного числа на двузначное при однозначном частном.
5. Деление многозначного числа на трёхзначное с подготовительными к нему упражнениями в делении многозначного числа на трёхзначное при однозначном частном.

Делимое, делитель, частное. Для ознакомления учащихся с названием чисел в делении и его результата решим две задачи — на каждый вид деления по одной. Одинаковые названия чисел в каждом виде деления будут способствовать объединению обоих видов деления в одно понятие деления.

Задача: «Трое рабочих получили поровну за выполненную работу, всего 240 руб. Сколько рублей получил каждый рабочий?»

Для решения этой задачи нужно 240 разделить на 3 равные части, или, короче говоря, 240 разделить на 3. Получится 80 руб.

240 руб. : 3 = 80 руб.

Число 240 мы делим, поэтому оно — делимое число, или просто делимое. На 3 мы делили; — оно делитель, 80 — третья часть делимого; оно — частное. Нужно, чтобы эти новые для учащихся термины были записаны на доске и в тетрадях учащихся; при этом надо особенно подчеркнуть правописание слова «частное» (учащиеся склонны пропускать букву «т»).

240	:	3	=	80
делимое		делитель		частное

Задача: «Для детского дома купили лопат на 120 руб., по 5 руб. за лопату. Сколько лопат куплено?»

Чтобы решить эту задачу, нужно узнать, сколько раз 5 руб. содержится в 120 руб. Для этого нужно 120 руб. разделить по 5 руб.

120 руб. : 5 руб. = 24.

24 лопаты были куплены. Это деление по содержанию. В нём 120 — делимое, 5 — делитель, 24 — частное. Что означает здесь частное 24? (Сколько раз 5 содержится в 120.)

После этого решается несколько примеров с названием чисел: «Делимое — 360, делитель — 4. Узнать, чему равно частное». Или «Найти частное от деления 200 на 5». «Как называются числа в примере 150 : 50 = 3?»

Деление многозначного числа на однозначное.

Первым и очень важным этапом в образовании навыка деления является деление многозначного числа на однозначное. На этом этапе дети усваивают порядок деления: постепенное и строго последовательное деление единиц каждого разряда делимого, начиная с высшего, для получения соответствующих разрядов в частном.

Объяснение механизма письменного деления начинается с рассмотрения простейших примеров, в которых каждый разряд делимого делится нацело, без остатка (82 642 : 2; 63 936 : 3), а затем и таких примеров, в которых от деления разрядных чисел получаются остатки. Деление сопровождается подробными объяснениями и подробными записями. Пусть дано разделить 32 862 на 6.

```
_32862 | 6
 30    |5477
 --
 _28
  24
  --
  _46
   42
   --
   _42
    42
    --
     0
```

Приступая к делению, ученик рассуждает так: «Старший разряд делимого — десятки тысяч. В частном десятков тысяч не получится: для того чтобы в частном получился хотя бы один десяток тысяч, в делимом их должно быть по крайней мере 6. Будем делить тысячи; 32 тысячи разделим на 6, получим в частном 5 (тысяч). Узнаем, сколько тысяч мы разделили; для этого умножим 5 на 6; получится 30. Вычитаем их из 32 тысяч; 2 тысячи остались неразделёнными. Раздробляем 2 тысячи в сотни, получим 20 сотен; кроме того, в делимом есть ещё 8 сотен; значит, всех сотен будет 28. 28 сотен делим на 6, получается в частном 4 сотни и в остатке 4 сотни; 4 сотни раздробляем в десятки, получаем 40 десятков, да 6 десятков в числе, всего 46 десятков» и т. д.

На таких полных записях и подробных объяснениях нужно держать учеников на первых четырёх-пяти уроках, добиваясь от учащихся сознательного отношения к каждой отдельной операции деления и тщательного, аккуратного оформления записей. В дальнейшем, когда смысл каждой операции ученикам станет ясен, можно ввести сокращённую запись:

```
32862 | 6
 28   |5477
 --
  46
  --
   42
   --
    0
```

А дальше можно переити к ещё более краткой записи:

$$32\,862 : 6 = 5477.$$

Переходя к сокращённой записи, нужно постепенно перейти и к краткой форме пояснений, сопровождающих процесс деления,— к кратким общепринятым условным выражениям: «отделяю в делимом две цифры», «сношу следующую цифру делимого», «делю на цифру сотен» (вместо — на число сотен) и др.

Уже на этой ступени деления надо обратить внимание учеников на то, что остатки, получаемые в процессе деления, всегда должны быть меньше делителя. Если полученный остаток больше или равен делителю, то это значит, что неверно взята цифра в частном. Такой остаток делить нельзя. Он показывает, что сделана ошибка: цифра частного мала; её надо увеличить и ошибку исправить.

На этой ступени деления, где цифры частного находятся легко, следует ознакомить учащихся и с более трудными случаями деления, а именно, с делением таких чисел, которые дают частное с нулями в середине и на конце. Эти частные случаи способствуют более отчётливому пониманию общего правила деления. Общеизвестно, что в таких примерах некоторые учащиеся, увлекаясь процессом получения остатков и их последующего раздробления, не уделяют должного внимания частному и пропускают в нём нули. Чтобы предупредить такие ошибки, нужно использовать следующие приёмы:

а) показать, как по значению первой цифры частного можно определить, сколько всего цифр должно быть в частном; б) обозначать незанятые места цифр частного точками; в) при делении называть, какие разряды делимого делятся и какие разряды получаются в частном; г) объяснить роль и значение нуля в частном, показав, как изменяется частное, если к нему по ошибке не приписан нуль. Так, при помощи целого комплекса средств может быть предупреждена одна из распространённых ошибок при делении.

К этим приёмам в дальнейшем надо присоединить ещё приём последующей проверки деления посредством умножения. Приведём пример такого деления с пояснениями:

$$\begin{array}{r|l} 21612 & 4 \\ \underline{16} & 5403 \\ \underline{12} & \\ 0 & \end{array}$$

«Старший разряд делимого — десятки тысяч. 2 дес. тысяч на 4 нацело не делятся, поэтому десятков тысяч в частном не будет. Отделяем в делимом ещё одну цифру и делим 21 тысячу на 4. 21 разделим на 4, будет 5—5 тысяч; значит в частном должно быть четыре цифры. В остатке получается 1 тысяча; сносим 6 сотен. Делим 16 сотен на 4, получается в частном 4 сотни. Четырежды 4—16. В остатке ничего нет. Сносим 1 десяток. 1 десяток на 4 не делится. Десятков в частном не получится. На месте десятков в частном ставим нуль. Продолжаем деление: сносим две единицы. Делим 12 единиц на 4, получится в частном 3 единицы. Итак, частное равно 5 403». Проверим: $5\,403 \times 4 = 21\,612$.

Закончить деление на однозначное число целесообразно объяснением и упражнениями в делении с остатком, когда последняя

цифра делимого не делится на делитель и является остатком, а в частном на конце нужно поставить нуль. При объяснении этого случая деления к тем приёмам, о которых говорилось выше, нужно присоединить предварительное прикидывание в уме, что должно получиться в частном.

«Четверо рабочих заработали 842 рубля и разделили их между собой поровну. Прикиньте в уме, сколько приблизительно должен получить каждый рабочий?» После этого можно приступить к письменному делению 842 на 4. Получив частное, полезно спросить, какова была бы ошибка, если бы нуль не был поставлен на конце.

Деление на число, выраженное единицей с нулями.

Деление на 10 можно рассматривать как деление на равные части и как деление по содержанию. Пусть дано 380 разделить на 10. Рассматривая это деление как деление на 10 равных частей, говорим: каждый десяток при делении его на 10 даёт единицу. В числе 380 имеется 38 десятков. От деления 38 десятков на 10 получим 38 единиц или просто 38.

Объясним это деление как деление по содержанию. Разделить 380 на 10 — значит узнать, сколько раз 10 содержится в 380. В числе 380 десятков 38. Поэтому 10 в 380 содержится 38 раз.

Познакомив учеников с одним и другим способом рассуждения, нужно дать им возможность пользоваться тем или другим способом по своему выбору.

Сперва решаются примеры на деление круглых чисел: 100 : 10; 560 : 10; 3 870 : 10; 6 390 : 10 и т. п.

Правило формулируется так: «Чтобы разделить на 10 число, оканчивающееся нулями, нужно отбросить в этом числе нуль».

После этого решаются примеры на деление с остатком: 186 : 10; 6 784 : 10; 459 128 : 10 и т. д.

Методика деления на 10 может быть в полной мере применена к делению на 100 и на 1 000.

Проделав ряд примеров деления на 10, 100 и 1 000, нужно сделать общий вывод: «Чтобы разделить число на единицу с нулями, достаточно откинуть в нём справа столько цифр, сколько нулей в делителе».

По этому правилу делятся на единицу с нулями сначала числа, оканчивающиеся нулями, а потом и любые числа.

Записывается такое деление не столбиком, а в строчку, например:

9700 : 100 = 97; 384 267 : 100 = 3842 (ост. 67).

Деление на круглые десятки, круглые сотни и круглые тысячи.

Деление на круглые десятки. Деление многозначного числа на круглые десятки сводится в конечном счёте к ряду делений двух- и трёхзначных чисел на круглые десятки. Поэтому

естественно начать изучение этого случая деления с деления трёхзначного числа на круглые десятки при однозначном частном.

1. Разделим 360 на 40. 360 — это 36 дес. 40 — это 4 дес. 4 дес. в 36 дес. содержатся 9 раз, потому что 4 дес.$\times$9=36 дес. Чтобы разделить 360 на 40, достаточно 36 разделить на 4.

2. Разделим ещё 487 на 60. 6 дес. могут содержаться только в десятках делимого, т. е. в 48 дес. Разделим 48 дес. на 6 дес. или 48 на 6, получим 8. Узнаем, сколько единиц мы разделили: 60 $\times$ $\times$ 8 = 480. Сколько единиц осталось неразделённых: 487 — — 480 = 7.

Запись деления:

```
 487 | 60
-480 |----
 ----  8
   7 (ост.)
```

Нужно проделать несколько таких упражнений, чтобы учащиеся хорошо усвоили приём нахождения цифры частного путём деления десятков делимого на цифру десятков делителя.

После этого нужно перейти к общему случаю деления многозначного числа на круглые десятки.

Пусть дано разделить 26 880 на 40. Рассуждаем так:

```
 26880 | 40
-240   |----
 ----   672
  288
 -280
  ----
    80
   -80
   ---
     0
```

«Отделим в делимом столько цифр, сколько их в делителе, т. е. две цифры; получим 26 тысяч; 26 тысяч на 40 не делится так, чтобы были целые тысячи; отделяем третью цифру и получаем 268 сотен. Делим 268 сотен на 40. Для нахождения цифры частного делим 26 на 4, получаем 6 (сотен). Умножаем 6 на 40, будет 240; от 268 сотен отнимаем 240 сотен, получаем 28 сотен. Раздробляем их в десятки, получаем 280 десятков, да 8 десятков — 288 десятков. Делим 288 десятков на 40 (для этого делим 28 на 4), получаем 7 десятков. Умножаем 7 на 40, получаем 280 десятков. Вычитаем их из 288, остаётся 8 десятков. Раздробляем их в единицы. Получаем 80 единиц; больше единиц в делимом нет. Делим 80 единиц на 40, получаем 2 единицы. Всего в частном получилось 672. Проверим, правильно ли получено частное; для этого умножаем 672 на 40:

```
  672
×  40
-----
26880
```

Получилось 26 880. Значит, деление выполнено правильно.

Среди примеров на деление многозначного числа на круглые десятки должно найти себе место деление с нулём в частном (например 24 160 : 80 = 302) и деление с остатком (например 40 765 : 70 = 582 (ост. 25).

Деление на круглые сотни. Здесь следует различать два случая: 1) деление на круглые сотни при однозначном частном и 2) деление на круглые сотни любого числа. Первый случай составляет основу второго.

1. Пусть дано разделить 2 400 на 600. Для этого узнаем, сколько раз 6 сотен содержатся в 24 сотнях. Получается 4 раза, так как 600 $\times$ 4 = 2 400

Значит, чтобы найти частное при делении 2 400 на 600, достаточно 24 разделить на 6.

На решении таких примеров у учащихся вырабатывается навык делить на цифру сотен. Так, например, деля 6 500 на 800, ученик будет делить 65 на 8. Получив цифру 8, он найдёт остаток, для чего он сначала узнает, сколько единиц разделено ($800 \times 8 = 6400$), а потом — сколько единиц в остатке ($6500 - 6400 = 100$).

```
_4876500 | 500
 4500    |----
 ----     9753
 _3765
  3500
  ----
  _2650
   2500
   ----
   _1500
    1500
    ----
       0
```

2. Разделим теперь 4 876 500 на 500. Рассуждаем так: Отделим в делимом три цифры, получим 487 десятков тысяч. Это число на 500 не делится так, чтобы получилось в частном хотя бы по одному десятку тысяч. Отделяем четвёртую цифру, получаем 4 876 тысяч. Делим их на 500; для этого делим 48 на 5 и находим цифру частного 9 (тысяч). Умножаем 500 на 9, получается 4 500. Вычитаем это число из 4 876; в остатке получается 376 тысяч. Раздробляем их в сотни... Так продолжаем деление до конца.

Надо следить за тем, чтобы ученики называли разрядные единицы: «4 876 тысяч делим на 500». При нахождении же цифры частного они говорят просто: «48 делим на 5, получается 9». Но, записывая девятку в частном, надо добавлять: «9 тысяч».

Деление на двузначное число.

Если проанализировать процесс деления многозначного числа на двузначное (например $18972 : 54 = 348$), то окажется, что деление этих чисел сводится к ряду делений трёхзначного числа на двузначное при однозначном числе в частном ($189 : 54$; $259 : 54$; $432 : 54$). Поэтому, чтобы выработать хороший навык деления многозначного числа на двузначное, надо прежде всего выработать уменье делить трёхзначное число на двузначное при однозначном частном. С этого, следовательно, и надо начинать объяснение и упражнения в делении на двузначное число.

Здесь должна быть преодолена основная трудность деления — подбор цифры частного. Если с этим этапом работы ученики справятся хорошо, то дальше они больших затруднений не встретят. Задача объяснения — показать, что при делении, например, 448 на 56, чтобы найти частное, надо 44 разделить на 5 и затем проверить эту цифру: она может оказаться пригодной в качестве частного и при делении числа 448 на 56.

1. Деление трёхзначного числа на двузначное при однозначном частном.

а) Делим 480 на 60 и 488 на 61.

Учащиеся уже знают, что для нахождения цифры частного надо разделить 48 на 6, получится 8. Значит, $480 : 60 = 8$. Возьмём дальше для деления числа, близкие к предыдущим, а именно: разделим 488 на 61. Чтобы быстрее найти частное, округлим число 61, оно близко к 60. Разделим 488 на 60, а для этого достаточно разделить 48 на 6, получим 8. Но нам требовалось разделить не на 60, а на 61. Так как 60 и 61 — числа, близкие между собой, то при делении 488 на 61 может получиться тоже 8 или число, близкое к 8.

Испытаем цифру 8; для этого умножим 61 на 8, получается 488. Значит, цифра 8 верна. Запишем деление, как обычно:

$$\begin{array}{r|l} -\,488 & 61 \\ \underline{488} & \overline{8} \\ 0 & \end{array}$$

Остановим внимание учеников на том, как мы нашли частное. Мы не занимались долгими поисками, пробами, а сразу разделили 48 на 6, получили 8, затем испытали эту цифру и нашли, что она верна.

б) Дальше берём пример: 416 : 52.

По образцу предыдущего примера для нахождения частного разделим 41 на 5, получим 8. Испытаем эту цифру, не годится ли она как частное при делении 416 на 52. Умножим 52 на 8 ($50 \times 8 = 400$; $2 \times 8 = 16$; $400 + 16 = 416$), получаем 416. Значит, цифра 8 верна.

$$\begin{array}{r|l} -\,416 & 52 \\ \underline{416} & \overline{8} \\ 0 & \end{array}$$

в) Однако не всегда легко и сразу удаётся найти частное. Бывает, что цифру частного приходится менять — увеличивать или уменьшать.

Возьмём пример: 280 : 35. Делим 28 на 3, получаем 9. Испытаем эту цифру, умножим 35 на 9 ($30 \times 9 = 270$; $5 \times 9 = 45$; $270 + 45 = 315$). Оказывается, цифра 9 велика («сильна»). Надо её уменьшить на единицу. Берём цифру 8, испытываем её, умножая 35 на 8. Цифра 8 верна:

$$\begin{array}{r|l} -\,280 & 35 \\ \underline{280} & \overline{8} \\ 0 & \end{array}$$

г) Иногда приходится найденную цифру частного уменьшать не на одну, а на несколько единиц.

Разделим 283 на 39. Чтобы найти частное, делим 28 на 3, получаем 9. Испытываем эту цифру: умножаем 38 на 9, оказывается, цифра 9 велика. Уменьшаем её на единицу. Испытываем восьмёрку ($30 \times 8 = 240$; $9 \times 8 = 72$; $240 + 72 = 312$), тоже велика. Берём 7. Цифра 7 верна.

$$\begin{array}{r|l} -\,283 & 39 \\ \underline{273} & \overline{7} \\ 10 & \end{array}$$

Так бывает в тех случаях, когда делитель оканчивается цифрой 8 или 9. Чтобы в таких примерах скорее находить частное, *выгодно округлять делитель до большего круглого* числа: 39 округлить до 40. Тогда в вышеприведённом примере будем делить 28 на 4, получим 7, т. е. сразу найдём верную цифру частного.

Надо решить несколько таких примеров, в которых делитель оканчивается цифрой 8 или 9, чтобы дать детям достаточную практику в округлении делителя до большего числа (например 441 : 49; 711 : 79).

д) Закончить эти упражнения следует решением примеров на деление с остатком, например: 475 : 54; 222 : 37. На этих приме-

рах учащиеся будут тренироваться в нахождении частного и в получении остатков, которые должны быть обязательно меньше делителя.

Испытание цифры частного производится у с т н о. Это несколько усложняет вычисления, но вместе с тем даёт хорошую тренировку в устном счёте, который совершенно необходим для письменного деления.

Решим пример на деление с остатком и покажем, какими пояснениями ученик сопровождает решение примера.

```
_450 | 65
 390 |----
 --- | 6
  60
```

«Разделим 450 на 65. Делим 45 на 6, получим 7. Испытаем эту цифру, умножим 65 на 7 ($60 \times 7 = 420$; $5 \times 7 = 35$; $420 + 35 = 455$), видим, что 7 — много. Возьмём 6; умножим 65 на 6, получается 390; вычтем 390 из 450; получим 60. Так как остаток 60 меньше делителя, то цифра 6 — верна».

2. Деление любого многозначного числа на двузначное.

Вся предыдущая работа над делением вполне подготовила учащихся к делению любых многозначных чисел на двузначное число: учащиеся усвоили принцип постепенного деления числа, начиная с высших разрядов, и научились находить цифру частного путём проб, а этого достаточно для получения нового навыка.

Упражнения проведём в таком порядке, который обеспечит ученикам постепенное нарастание трудности. Начнём с деления трёхзначного числа на двузначное, когда в частном получается двузначное число (264 : 12; 432 : 36). Вслед за этим дадим примеры, в которых в частном на о д н у цифру меньше, чем в делимом; это бывает в тех случаях, когда первые д в е цифры делимого делятся на делитель, например: 4 675 : 25. Третью группу примеров составят такие примеры, в которых в частном на д в е цифры меньше, чем в делимом; это бывает в тех случаях, когда в делимом, начиная деление, приходится отделять т р и цифры для получения первой цифры частного, например: 12 155 : 85. Это основная группа примеров в данном разделе: ей должно быть отведено больше времени и уделено больше внимания.

Последнюю группу примеров составят примеры на так называемые ч а с т н ы е случаи деления: а) примеры, в которых частное с нулями (10 032 : 33); б) примеры на деление с остатком; в) примеры на деление с остатком — с нулями на конце в частном (самый трудный вид примеров), например 58 812 : 14 = 4200 (ост. 12). Приведём образец решения примера третьей группы.

```
_45192 | 84
 420   |-----
 ---   | 538
 _319
  252
  ---
  _672
   672
   ---
     0
```

Отделим в делимом две цифры — 45 тысяч. Тысяч в частном не получится. Отделяем 3 цифры —451 сотню. Делим 451 на 84; для этого делим 45 на 8, получится 5 (сотен). Прикинув в уме, видим, что эта цифра годится. Умножаем 84 на 5, получается 420. Вычитаем 420 из 451, получается 31 сотня. Раздробляем 31 сотню в десятки, получаем 310 десятков, да 9 десятков — 319 десятков. Делим 319 десятков на 84; для этого делим 31 на 8, получается 3. Проверим эту цифру в уме: цифра, повидимому, годится, следующая цифра 4 явно

велика. Умножаем 84 на 3, получается 252. Вычитаем 252 из 319, в остатке получается 67 десятков. Остаток не больше делителя, поэтому цифра 3 — верна. Сносим 2 единицы, получим 672 единицы; делим их на 84. Делим 67 на 8, получаем 8. Умножаем 84 на 8, получаем 672. Цифра 8 — верна. В частном получили 538.

Деление на трёхзначное число.

Процесс деления многозначного числа на трёхзначное складывается из ряда делений трёх- и четырёхзначных чисел на трёхзначное число при однозначном частном. Например, деление числа 213 816 на 472 состоит из троекратного деления четырёхзначных чисел:

I. 2 138 : 472, II. 2 501 : 472, III. 1 416 : 472.

Отсюда ясно, что прежде чем начинать деление на трёхзначное число при многозначном частном, нужно научить детей делить четырёхзначные числа на трёхзначные при однозначном частном.

Поэтому обучение делению на трёхзначное число нужно разбить на две ступени: 1) подготовительную ступень, куда входит деление четырёхзначного числа на трёхзначное при однозначном частном, и 2) основную ступень — деление любого многозначного числа на трёхзначное число.

1. Подготовительная ступень.

На этой ступени нужно научить детей находить цифру частного, пользуясь упрощённым способом, который, как известно, состоит в следующем: в делителе отбрасывают две последние цифры (единицы и десятки), в делимом — тоже; после этого сотни делимого делят на число сотен делителя; полученное число подвергается проверке.

Объяснение этого способа можно дать на следующей серии примеров:

I.
```
 _1200 | 300
  1200 |----
  ----    4
     0
```

Разделить 1 200 на 300 значит узнать, сколько раз 300 содержится в 1 200; 1 200 — это 12 сотен, 300 — это 3 сотни. Чтобы узнать, сколько раз 3 сотни содержатся в 12 сотнях, нужно 12 разделить на 3. Получится 4. Действительно $300 \times 4 = 1\,200$.

II.
```
 _1825 | 600
  1800 |----
  ----    3
    25
```

1 825 — это 18 сотен и 25 единиц, 600 — это 6 сотен, 6 сотен могут содержаться только в сотнях делимого, т. е. в 18 сотнях. Сколько же раз 6 сотен содержатся в 18 сотнях? Делим 18 на 6.

Получается в частном 3. Чтобы узнать, какое число разделили и сколько осталось, умножим 600 на 3 и вычтем 1 800 из 1 825. Обращаем внимание учеников на то, как мы нашли частное (18 разделили на 6).

III. $\begin{array}{r|l} -\,1648 & 412 \\ 1648 & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$

Делитель 412 — число близкое к 400. Поэтому пока разделим 1 648 на 400, а потом посмотрим, не подойдёт ли полученное частное к делению 1 648 на 412. Чтобы разделить 1 648 на 400, делим 16 на 4, получается 4. Испытаем это число; может быть, оно пригодится как частное и при делении данного числа на 412. Прикинем в уме, сколько получится от умножения 412 на 4 ($400 \times 4 = 1\,600$; $12 \times 4 = 48$; $1\,600 + 48 = 1\,648$). Оказывается, число 4 есть частное от деления 1 648 на 412. Как мы нашли частное 4? Разделили 16 сотен на 4 сотни и полученную цифру 4 проверили.

IV. $\begin{array}{r|l} -\,2576 & 368 \\ 2576 & 7 \\ \hline 0 & \end{array}$

Частное не всегда находится сразу. Иногда испытываемую цифру частного приходится уменьшать на единицу или даже больше. В данном примере делим 25 сотен на 3 сотни, получается 8. Но при устной проверке оказывается, что число 8 велико (3 сотни $\times 8 = 24$ сотни; 6 десятков $\times 8 = 48$ десятков, что составляет более 4 сотен). Уже отсюда видно, что цифра 8 не годится Уменьшим её на единицу и испытаем число 7 (3 сотни $\times$ $\times 7 = 21$ сотня; 6 десятков $\times 7 = 42$ десятка $= 4$ сотни $+ 2$ десятка). Из проверки видно, что цифра 7 годится. Пишем её в частное и заканчиваем деление.

V. $\begin{array}{r|l} -\,1776 & 296 \\ 1776 & 6 \\ \hline 0 & \end{array}$

На примерах этого типа показываем, что при делении надо обращать внимание не на отдельные цифры, а на делитель в целом. 296— это почти 300. Поэтому, чтобы скорее и легче найти цифру частного, надо делить 17 сотен делимого на 3 сотни делителя, а не на 2, т. е. надо округлить делитель до большего круглого числа.

Чтобы убедить учеников в том, что пользование облегчённым приёмом действительно ускоряет процесс нахождения цифры частного, несколько примеров нужно решить, не прибегая к этому приёму, а пользуясь методом проб, начиная с использования цифры 2. В самом деле, сколько раз надо взять по 368, чтобы получить 2 576? Очевидно, что 2 раза — мало, 3 раза и 4 раза — тоже. Пробуем брать 5 раз, 6 раз по 367, и так доходим до 7. Уче-

ники на опыте убеждаются в несовершенстве такого приёма нахождения цифры частного и в необходимости искать другой, более лёгкий и скорый приём.

2. Деление любого многозначного числа на трёхзначное.

При переходе к делению любого многозначного числа на трёхзначное, нужно расположить упражнения в следующем порядке:

1) деление трёхзначного числа на трёхзначное (968 : 242);

2) деление многозначного числа на трёхзначное, когда для получения первой цифры частного в делимом достаточно отделить три цифры (например, 241 21 : 117);

3) деление на трёхзначное число, когда для получения первой цифры частного нужно отделять в делимом четыре цифры (2148 045 : 475).

В делении многозначного числа на трёхзначное при многозначном частном трудности выполнения действия достигают своего кульминационного пункта. От учителя в объяснении таких случаев деления требуется большое методическое мастерство, большая чёткость и последовательность в объяснении, уменье сложную операцию деления на глазах учеников расчленить на отдельные элементы, на простые операции, вскрыть сложный механизм деления и показать его части в их взаимодействии. Вот, например, как можно расчленить процесс деления числа 219 825 на 475 и показать, как найти первую цифру частного:

$$219325 \;\underline{|\;475\;}$$
$$4$$

Отделяем в делимом 4 цифры и делим 2198 сотен на 475:

а	б	в	г
2198 : 475	21 : 4	475 × 5 = 2375	475 × 4 = 1900

Здесь показаны этапы нахождения первой цифры частного. Все эти операции нужно производить по представлению, устно, без записей. Но в первых двух-трёх примерах полезно их записать, чтобы помочь ученикам более отчётливо представить себе те мелкие операции, которые входят в качестве составных частей в сложную операцию деления.

Из отдельных вычислительных операций, входящих в процесс деления многозначного числа на трёхзначное, самой трудной для учеников является испытание цифры частного посредством устных вычислений. В самом деле, чтобы проверить, пригодна ли в примере 28 014 : 667 в качестве первой цифры частного цифра 4, ученик должен устно умножить 667 на 4 и сопоставить полученный результат с числом 2801. Как поступают обычно ученики в таком случае? Они, пользуясь черновиками, промокательной бумагой и другими средствами, а чаще и без всяких средств — в воображении, умножают 667 на 4 письменным путём,

т. е. умножают 7 на 4, затем 6 на 4 и т. д; получаемые цифры сравнивают с цифрами числа 2801 и из сопоставления цифр делают заключение о пригодности или непригодности испытуемого частного.

Такой приём испытания цифры частного — письменное умножение по воображению, без письма — является наихудшим. Он труден и не гарантирует ученика от ошибки, при нём ученик перестаёт иметь дело с числом; работа с числом подменяется работой с цифрами. Но нужно согласиться и с тем, что к устному умножению трёхзначного числа на однозначное ученик III класса не подготовлен. Чтобы облегчить детям выполнение этой операции, достаточно на цифру частного умножать не трёхзначное, а двузначное число (число десятков делителя) и полученное произведение сравнивать с числом десятков делимого. При этом точность проверки для многих случаев деления является вполне достаточной, а операция умножения сильно облегчается и делается доступной основной массе учащихся. Этот момент деления можно объяснить ученикам, примерно, следующим образом: «При проверке цифры частного главную роль играют сотни делимого и делителя; они самые крупные единицы, от них главным образом зависит результат, с ними в первую очередь надо считаться. В нашем примере (28 014 : 667), когда отделили в делимом 4 цифры и получили число 2801, то главное значение имеет то, что в числе 2801 имеется 28 сотен, а в делителе 6 сотен. По этим числам мы и наметили цифру частного 4. Но при испытании этой цифры нельзя считаться только с сотнями, надо обращать внимание на сотни вместе с десятками. Десятки — тоже крупные единицы, из них могут составиться сотни. Поэтому в нашем примере мы должны особое внимание обратить на то, что в делимом 280 десятков, а в делителе 66 десятков. С единицами пока можно не считаться: от них меньше зависит частное. Умножим 66 десятков на 4, получим 264 десятка; это меньше, чем 280, значит цифра четыре годится». Дальше мы укажем ученикам на то (и они убедятся в этом на опыте), что иногда приходится обращать внимание на единицы, из них при умножении могут получиться десятки.

Такого рода объяснения нужно давать ученикам неоднократно, на многих конкретных примерах.

На этой ступени деления надо продолжать работу над углублением понимания учащимися того, что остаток всегда должен быть меньше делителя. Учитель должен чутко реагировать на такого рода ошибки, если они возникают. Ученикам, допускающим подобные ошибки, полезно ставить такие вопросы: «В данном случае (допустим, решается пример: 51 243 : 589) какое самое большое число может быть в остатке? В остатке получилось 589. Почему произошла такая ошибка?» Полезно предлагать ученикам разбираться в примерах с неверными ответами, находить ошибку и объяснять её причину.

Среди примеров на деление с трёхзначным делителем видное место должны занимать и такие случаи деления, когда в частном — в середине и конце его — встречаются нули. Тренировка в таких случаях деления воспитывает внимание учащихся, привычку производить вычисление осторожно и внимательно с проверкой результата деления умножением и повторным выполнением действия по уже сделанной записи.

Из примеров на деление с нулями в частном выделяем по трудности тот случай деления, когда это действие выполняется с остатком и в конце частного ставятся нули, например:

```
_4815 | 16
 48   |----
 --    300
   15 (ост.)
```

Допускаемая в этом примере ошибка состоит в том, что некоторые учащиеся не ставят в частном на месте единиц и десятков нули. У этих учащихся в частном получается 3, а в остатке 15.

Чтобы предупредить такие ошибки, полезно упражнять учащихся в определении приближённого частного на примерах с двузначным делителем: 30 152 : 15, 48 247 : 12. Нелегки эти упражнения. Но зато те ученики, которые преодолеют эти трудности, начинают другими глазами смотреть на вычислительные операции: у них на первый план выступает число со всеми его особенностями; каждый разряд делимого и частного получает своё значение.

Деление чисел, оканчивающихся нулями.

Деление чисел, оканчивающихся нулями, можно выполнять по общему правилу, например:

```
_956000 | 3200
 6400   |-----
 ----     298
_31600
 28800
 -----
 _28000
  25600
  -----
   2400
```

Но можно воспользоваться и сокращённым приёмом деления, отбросив в делимом и делителе одинаковое количество нулей. Этот приём основан на том, что частное не изменяется, если мы делимое и делитель уменьшим в одинаковое число раз, например:

```
_9560̸0̸ | 320̸0̸
 64     |-----
 --       298
_316
 288
 ---
 _280
  256
  ----
   2400
```

Здесь ученику приходится иметь дело с меньшими числами. В случае получения остатка, к значащим цифрам его нужно приписать отброшенные нули. Учащиеся часто забывают это делать и получают неправильный результат.

Для предупреждения ошибок нужно тщательно объяснить суть этого приёма, подчеркнуть, что, зачёркивая два нуля, мы выражаем делимое в сотнях: 956 тысяч мы выразили числом 9 560 сотен. Поэтому и в остатке получили сотни — 24 сотни, или 2 400. Число 2 400 получится, когда к остатку (24) припишем зачёркнутые нули. Правило деления чисел, оканчивающихся нулями, нужно формулировать так: «При делении чисел, оканчивающихся нулями, можно в делимом и делителе зачеркнуть одинаковое число нулей, но если получится остаток, то к остатку нужно приписать зачёркнутые в делимом нули».

Так как основа этого приёма (неизменяемость частного при одинаковом уменьшении делимого и делителя в несколько раз) изучается в IV классе, то применение его может быть дано не ранее, чем в IV классе.

Проверка результата деления производится при помощи умножения: делитель умножается на частное и если получится делимое, вычисление произведено верно.

Примерные контрольные работы.

Изучение деления вместе с решением задач занимает больше 30 уроков. В течение этого времени должны быть проведены две-три контрольные работы. Из них одна проводится после изучения деления на однозначное число; вторая — в конце работы над делением; третью — желательно отвести для проверки уменья решать задачи, связанные с делением.

В содержание первой контрольной работы должны войти:

1) Общий случай деления; например: 76 428 : 6.
2) Деление с остатком; например: 9 886 : 8.
3) Частное имеет нуль в середине; например: 42 348 : 6 = 7 058.
4) Частное с нулями в середине и на конце; например: 540 360 : 9.
5) Число 682 000 уменьшить в 100 раз.
6) Проверить: 39 480 : 7 = 5 640.
7) Написать название чисел в делении.

Примерное содержание контрольной работы в конце изучения деления:

1) Деление на двузначное число; например: 37 952 : 64.
2) Деление на трёхзначное число (общий случай); например: 216 221 : 453.
3) Частный случай деления — частное с нулями в середине и на конце; например: 956 760 : 238 = 4 020.
4) Деление с остатком — частное с нулём на конце; например: 6 486 : 12 = = 570 (ост. 6).
5) Составить и решить задачу в одно действие, в которой требуется узнать, сколько раз одно число содержится в другом.

Содержанием третьей контрольной работы могут служить, например, следующие задачи:

1. «Пароходу нужно пройти 1 944 *км*. Он прошёл двенадцатую часть этого расстояния, проходя в час по 18 *км*. Сколько часов шёл пароход?»

2. «15 *м* полотна стоят 225 руб., а 8 *м* шерстяной материи 1 200 руб. Во сколько раз 1 *м* шерстяной материи дороже 1 *м* полотна?»

Первая задача решается с письменными вопросами; вторая — с записью только действий.

При проверке работы тщательно учитывается, сколько учащихся правильно применили деление в следующих случаях: а) деление на равные части, б) нахождение части числа, в) деление по содержанию, г) кратное сравнение чисел.

Образцы записей арифметических действий.

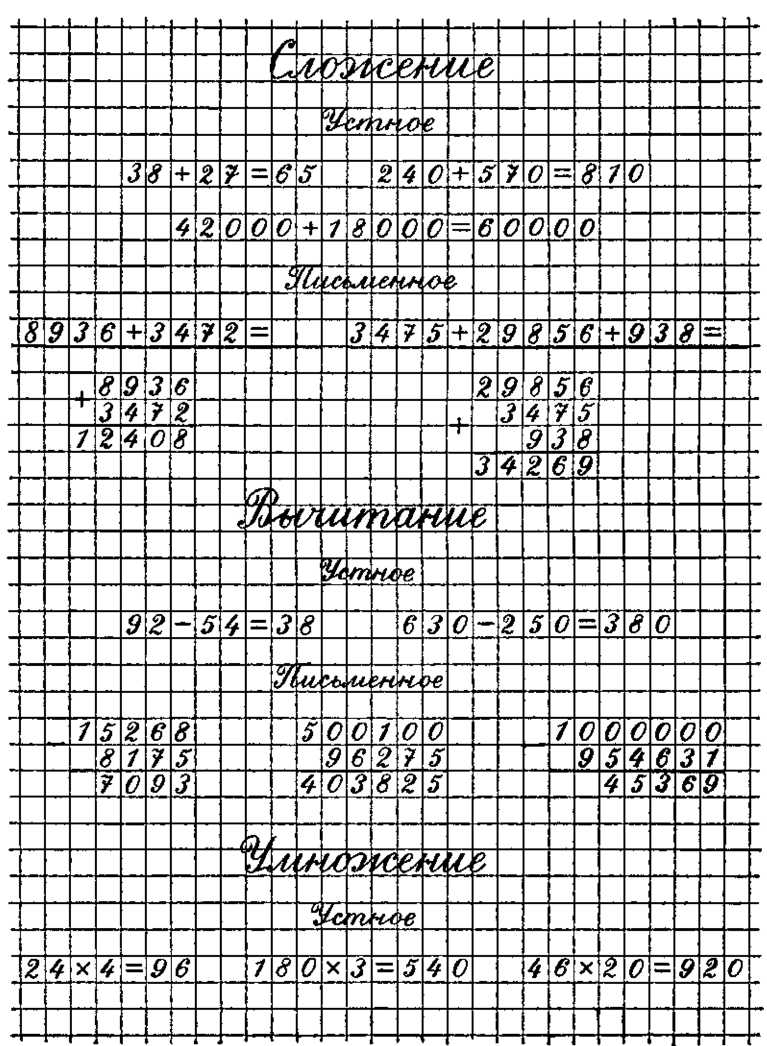


Рис. 58,а.

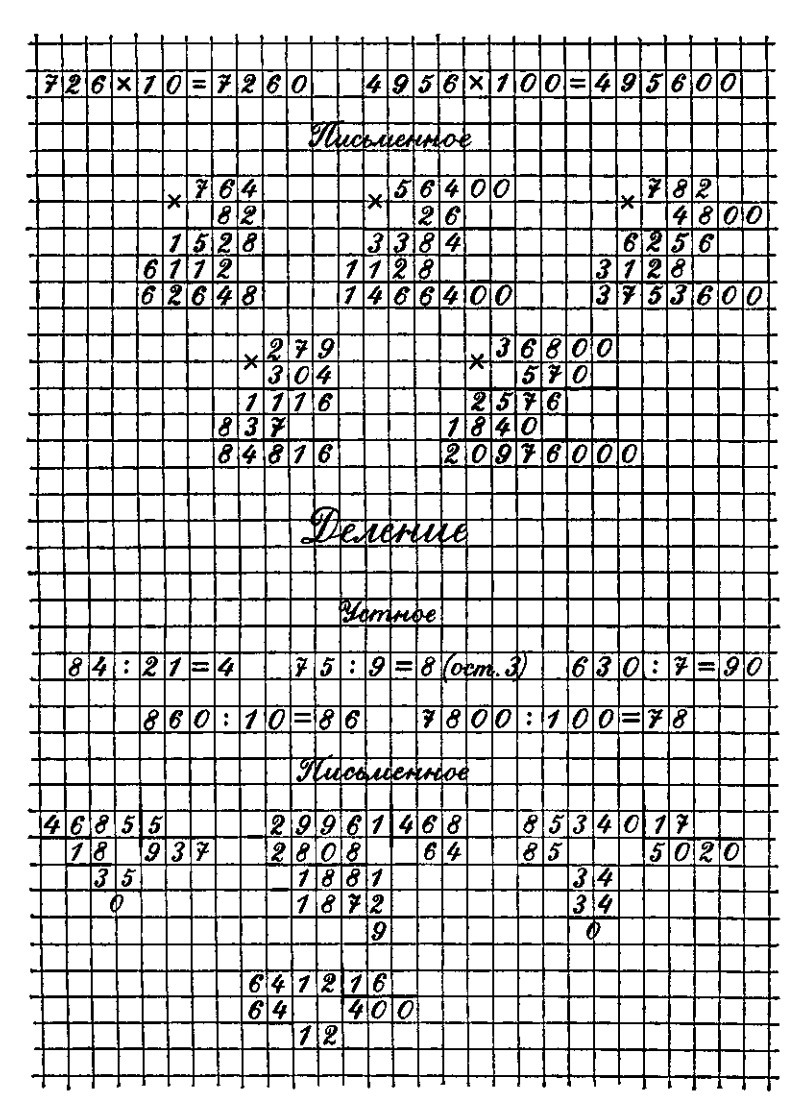


Рис. 58,б.

Пояснения к таблице записи арифметических действий.

Если надо сложить 3, 4, 5 слагаемых, то, записав их столбиком, нужно производить сложение, не прибегая к разбивке слагаемых на группы или к последовательному сложению, когда сначала находится сумма двух слагаемых, а затем к этой сумме прибавляется третье слагаемое и т. д. Такая практика только тормозит образование твёрдого и устойчивого навыка сложения.

При сложении нет никакой необходимости ставить над разрядами слагаемого точки или маленькие цифирки для напоминания о прибавлении единиц, выделенных из суммы, полученной от сложения единиц предшествующего разряда.

Но при вычитании можно допустить, чтобы учащиеся отмечали **точками** те разряды, от которых они «занимают» единицу. Однако эти точки нельзя причислять к обязательным и необходимым знакам, какими являются, например, знаки арифметических действий. Точки в данном случае играют вспомогательную роль, и дело учителя — вводить или не вводить их. Опыт показывает, что применение точки не имеет решающего значения: можно с одинаковым успехом обучать вычитанию как используя точку, так и не пользуясь ею.

Умножение многозначных чисел удобнее производить, подписывая множитель под множимым; при записи «в столбик» легче привести в соответствие те разряды, над которыми производится действие, благодаря чему вычислительный процесс скорее автоматизируется, становится легче, и вероятность ошибки уменьшается.

В постановке знака + при сложении неполных произведений нет необходимости: он сам собой подразумевается. Однако во время объяснения способа умножения на двузначное и трёхзначное число и в первоначальных упражнениях, пока навык формируется, знак + полезно писать.

Сказанное о знаке + при сложении неполных произведений относится и к знаку — (минус) в письменном делении при вычитании произведений из неполных делимых.

Если дано деление без остатка, то оно заканчивается постановкой нуля. Для опускания нуля нет оснований. Арифметика учит, что разность равных чисел равна нулю; например: 136 — 136 = 0. От того, что в письменном делении подобного рода вычитание записывается столбиком $-\begin{array}{r}136\\136\\\hline\end{array}$ сущность не меняется: и при такой записи разность равна нулю, т. е $-\begin{array}{r}136\\136\\\hline 0\end{array}$ Писать в остатке несколько нулей (в нашем примере 3 нуля) нелепо.

В случае деления с остатком последний должен оставаться под делимым, часть которого он составляет. В переносе этого остатка в частное нет необходимости.

ПОРЯДОК ДЕЙСТВИЙ. СКОБКИ.

Этим небольшим по объёму разделом завершается изучение действий с целыми числами. Здесь учащиеся получают сведения об общепринятом порядке выполнения действий, об условиях употребления скобок. Эти сведения, имея теоретическое значение, подготовляют учащихся к успешному прохождению курса математики на последующих ступенях обучения.

Изучая порядок действий, учащийся должен усвоить следующие положения и правила:

1. Когда в числовом примере даны сложение и вычитание, то эти действия выполняются в том порядке, в каком они записаны, например:

$$63 - 26 + 48.\ 1)\ 63 - 26 = 37;\ 2)\ 37 + 48 = 85.$$

2. Если в числовом примере даны умножение и деление, то они выполняются в том порядке, в каком записаны, например:

$$36 : 3 \times 4.\ 1)\ 36 : 3 = 12;\ 2)\ 12 \times 4 = 48.$$

3. Если же в сложном примере даны действия разных ступеней, то сначала выполняются умножение или деление, а потом сложение или вычитание, например: $80 - 15 \times 3 + 60 : 3$.

1) $15 \times 3 = 45$; 2) $60 : 3 = 20$; 3) $80 - 45 = 35$; 4) $35 + 20 = 55$.

Для усвоения этих правил требуется достаточно большое количество упражнений.

На протяжении года нужно неоднократно возвращаться к правилам о порядке выполнения действий, решать побольше соответствующих сложных примеров, и тогда прочность навыка будет обеспечена.

Приёмы ознакомления учащихся с этим разделом просты: учитель сообщает правила, иллюстрирует их выполнение на решении примеров, учащиеся повторяют и усваивают формулировку правил и применяют их к решению сложных примеров. Для большей убедительности важно показать, что нарушение порядка может в некоторых случаях привести к иному результату.

Система работы будет следующей: 1) $30 - 20 + 5 = 15$. Написав этот пример, учитель при активном участии учащихся устанавливает, что здесь даны сложение и вычитание и что эти действия выполняются в том порядке, в каком они записаны, т. е. сначала вычитание, потом сложение. Если бы этот порядок мы нарушили и стали выполнять сначала сложение $(20 + 5)$, а потом вычитание, то получили бы другой результат (5, а не 15). Дальше ученики решают несколько примеров этого вида.

2) $72 : 6 \times 2$. Учащиеся указывают, что в этом примере даны два действия — умножение и деление; сначала обозначено деление, потом умножение. В таких случаях надо держаться того же правила, какое было принято для сложения и вычитания, т. е. производить действия в том порядке, в каком они записаны. В данном случае сначала надо 72 разделить на 6, а потом полученное число 12 умножить на 2, получится 24. Если бы вначале стояло умножение, а потом деление, то мы так и выполняли бы действия: сначала умножение, потом деление, например:

$$16 \times 4 : 8 = 8$$

Несоблюдение этого порядка может привести к иному результату, например: $72 : 6 \times 2$. Если здесь сначала произвести умножение $(6 \times 2 = 12)$, а потом деление $(72 : 12)$, то получится 6, а не 24.

3) $15 \times 4 + 96 : 6 =$

1) $15 \times 4 = 60$
2) $96 : 6 = 16$
3) $60 + 16 = 76$

В этом примере даны три различных действия: умножение, сложение и деление. Когда в примере встречаются все действия,

то сначала выполняется умножение или деление, а потом сложение или вычитание. Следуя этому порядку, мы должны в данном примере выполнить сначала умножение, потом деление и, наконец, сложение. По этому правилу решается ряд таких примеров с постепенным их усложнением. Более сложным являются примеры типа $70 - 60 : 5 + 9 \times 8$. Здесь порядок действий: деление, умножение, вычитание и потом сложение.

Употребление скобок[1]. Бывают случаи, когда установленный порядок действий должен быть изменён и нужно показать, в каком именно порядке следует производить арифметические действия. Для этой цели служат скобки. Смысл и значение скобок лучше всего уясняются на задачах. Решение задач, предназначенных для выяснения значения скобок, записывается формулой.

Сначала подбираются такие задачи, в которых формулы их решения не требуют скобок, а затем задачи с формулами, требующими введения скобок. На этих последних задачах учитель и раскрывает перед учащимися смысл употребления скобок.

Приведём образцы задач, расположенных в порядке постепенного их усложнения.

Задачи, решаемые по формулам, не требующим скобок.

1) «Ученик купил 4 карандаша по 8 коп. за карандаш и 5 тетрадей по 10 коп. за тетрадь. Сколько стоит вся покупка?»

Формула решения: $8 \times 4 + 10 \times 5$.

2) «Рабочий купил на 400 руб. несколько 50-рублёвых облигаций и на 100 руб. несколько облигаций по 25 руб. Сколько всего облигаций купил рабочий?»

Формула решения: $400 : 50 + 100 : 25$.

Составив формулу, учащиеся решают её, соблюдая нормальный порядок действий.

Задачи, решаемые по формулам со скобками.

1) «Сумму чисел 1 803 и 3 148 увеличить втрое».

Формула решения: $(1\,803 + 3\,148) \times 3$.

2) «Школа получила 315 тетрадей, из них 135 тетрадей она оставила, а остальные раздала поровну 45 ученикам. Сколько тетрадей получил каждый ученик?»

Формула решения: $(315 - 135) : 45$.

3) «Рабочий в первую неделю заработал 146 руб., а во вторую — 126 руб. На эти деньги он хотел купить несколько стульев ценой по 25 руб., но каждый стул оказался дороже, чем он предполагал, на 9 руб. Сколько стульев купил рабочий на весь свой двухнедельный заработок?»

Формула решения: $(146 + 126) : (25 + 9)$.

Объяснение значения скобок. Возьмём для этого вышеприведённую задачу: «Школа получила 315 тетрадей...» Задача решается сначала устно, а потом решение её записывается так:

1) 315 тетр.— 135 тетр.= 180 тетр.
2) 180 тетр.: 45 = 4 тетр.

---

[1] Из опыта работы И. С. Деренкова, преподавателя Уржумского педагогического училища.

Далее решение этой задачи записывается в виде формулы, пока без скобок: 315 — 135 : 45.

Учащиеся решают эту формулу на основании усвоенных ими правил:

1) 135 : 45 = 3; 2) 315 — 3 = 312.

Получив в результате число 312, учитель обращает внимание учащихся на причину расхождения между ответом и полученным результатом: сравнивают порядок действий в решении задачи и порядок выполнения их по формуле, первый порядок не соответствует второму, в решении задачи первое действие — вычитание, а второе — деление, в вычислении же по формуле первое действие — деление, второе — вычитание. Учитель обращает внимание учеников и на то, что порядок выполнения действий по формуле не соответствует содержанию задачи: в задаче сказано, что остальные тетради, т. е. остаток (315—135), были разделены поровну между 45 детьми, в вычислениях же по формуле на 45 делили число 135, т. е. тетради, оставленные про запас. Чтобы показать, что на 45 делится результат вычитания, действие вычитания заключают в скобки.

Таким путём учащиеся приходят к осознанию необходимости изменить в формуле установленный порядок действий и к пониманию значения скобок, при помощи которых порядок действий изменяется, когда это необходимо.

Узнав, для чего употребляются скобки, учащиеся вводят их в первоначально составленную формулу и таким образом приводят её в соответствие с ходом решения задачи:

(315 — 135) : 45.

Вслед за этим, чтобы закрепить пройденное, учащимся предлагаются одна-две задачи, формулы решения которых также требуют одной только пары скобок. Дальше же даются и такие задачи, в формулах решения которых встречаются две пары скобок.

Итак, путь ознакомления учащихся со значением скобок будет следующий:

а) задача решается обычным порядком с записью каждого отдельного действия строчками;

б) решение задачи записывается в виде числовой формулы без скобок;

в) производится вычисление и сравниваются ответы, полученные в той и другой записи;

г) выявляется несоответствие между обоими ответами;

д) устанавливается необходимость изменения в числовой формуле общепринятого порядка действий и указывается, что это изменение производится при помощи скобок;

е) предлагается учащимся воспользоваться скобками и написать формулу в ином виде, указав при помощи скобок тот порядок, в каком должны производиться действия.

В результате такого объяснения учащиеся формулируют и запоминают правило: «Когда нужно изменить установленный порядок выполнения действий, то употребляются скобки: в примерах со скобками сначала выполняются те действия, которые заключены в скобки».

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ.

НУМЕРАЦИЯ И ЧЕТЫРЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЯ НАД ЦЕЛЫМИ ЧИСЛАМИ В IV КЛАССЕ.

Повторение и углубление пройденного в III классе. Изучить арифметическое действие — это значит: 1) усвоить основные законы действия и основанные на них правила выполнения действия; 2) усвоить технику вычисления; 3) понять цель и смысл действия; 4) усвоить зависимость между компонентами действия и на основе этой зависимости уметь найти неизвестный член действия по двум известным; 5) знать, как изменяется результат действия в зависимости от изменения данных, и 6) уметь правильно применять действия при решении задач. Вся совокупность понятий, связанных с каждым арифметическим действием, усваивается детьми постепенно, медленно, на протяжении четырёх лет обучения в начальной школе. В первых трёх классах обращается главное внимание на усвоение техники вычисления, на устные и письменные приёмы выполнения действий и решение задач.

В IV классе учащимся даётся знание зависимости между данными и результатом каждого действия, знание изменения результата в зависимости от изменения данных.

Изучение нового материала здесь тесно переплетается с повторением пройденного, которое приобретает особенно большое значение в связи с тем, что в IV классе экзамен по арифметике проводится за весь курс начальной школы.

Каждое арифметическое действие в IV классе изучается так, что сначала повторяется то, что уже известно учащимся о данном действии, решаются примеры и задачи на данное действие, а затем изучается новый материал.

Вся работа над целыми числами в IV классе должна быть направлена на то, чтобы закрепить и систематизировать знания учащихся в этой области.

ПОВТОРЕНИЕ НУМЕРАЦИИ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ.

Основные сведения по нумерации учащиеся усвоили в III классе. В IV классе расширяется область чисел введением класса миллиардов, и всё пройденное повторяется. Это повторение сопровождается некоторыми обобщениями, которые формулируются как правила или выводы и запоминаются учащимися. Из таких обобщений-выводов учащиеся должны запомнить примерно следующее:

Для записи чисел служат 10 цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 0.

Все цифры, кроме нуля, называются значащими.

Значение цифры изменяется в зависимости от места, которое она занимает.

Счётные единицы объединяются в классы (какие?).

В каждый класс входят по три разряда (какие?).

Единица каждого разряда больше единицы соседнего разряда, стоящего справа, в 10 раз.

Число, записанное одной цифрой, называется однозначным, двумя цифрами — двузначным, тремя и более — многозначным.

Чтобы узнать, сколько во всём числе заключается единиц данного разряда, надо отбросить все цифры, означающие низшие разряды, и прочитать оставшееся число.

Делая ударение на систематизации знаний по нумерации, нужно в то же время не упускать из виду и того элементарного, чем в совершенстве должны владеть ученики IV класса,— уменья правильно писать и читать многозначные числа. Это уменье даётся нелегко, и для выработки его нужно проделать с учениками достаточно много упражнений.

Повторяя нумерацию, нужно добиться, чтобы учащиеся понимали смысл слов «число» и «цифра» и правильно употребляли их в своей речи. Нередко от учащихся можно слышать такую фразу: «Отделим в делимом три числа» вместо «Отделим три цифры». Исправляя в речи учащихся такие ошибки, нужно обратить их внимание на то, что чисел бесконечно много, а цифр всего десять и при помощи этих цифр можно обозначить любое число.

Упражнениями, ведущими к отчётливому пониманию различия между словами «число» и «цифра», могут быть такие: а) Напишите все цифры; б) Напишите: два каких-либо четырёхзначных числа; пятизначное число и т. д.; в) Даны три цифры — 6, 2 и 5. Какие числа можно обозначить этими цифрами? и др.

В IV классе необходимо дать ученикам представление о величине миллиона и миллиарда на конкретных примерах.

«Иллюстрация больших чисел конкретными примерами должна проводиться путём решения целесообразно подобранных задач, например: «Сколько потребуется времени, чтобы написать миллион букв?»

Сначала предлагаем учащимся ответить на этот вопрос без предварительного вычисления (как им кажется). Ответы бывают очень разнообразны — от $^1/_2$ часа до 10 дней, причём большинство учеников находит последний ответ крайне преувеличенным.

Учитель выясняет, что правильный ответ можно получить только после вычисления, и предлагает учащимся решить задачу, считая, что в минуту можно написать 100 букв. Ученики получают в ответе 166 час. 40 мин., что при 8-часовом рабочем дне составляет почти 21 день.

Ученики обычно удивляются такому результату, но в то же время они бывают удовлетворены тем, что приобрели хотя бы некоторое представление о величине миллиона.

После этого даются следующие задачи:

1) Сколько нужно поездов для перевозки 1 000 000 *ц* хлеба, если в каждый вагон погружать 200 *ц*, а в составе поезда считать 40 вагонов?

2) Может ли человек прожить миллион часов?

3) Во сколько времени паровоз сделает 1 000 000 *км* пробега, если за 1 час в среднем он проходит 40 *км*?

При решении задачи о паровозе нужно сообщить учащимся, что на земном шаре нет двух таких пунктов, расстояние между которыми было бы равно 1 000 000 *км*, так как длина окружности экватора равна 40 000 *км*.

Для ознакомления учащихся с величиной миллиарда нужно предложить им вычислить, сколько лет составит миллиард минут.

Нередко учащиеся спрашивают, где в практике приходится пользоваться такими большими числами, как миллион, миллиард.

Нужно указать, что миллиардом мы пользуемся при определении валового сбора хлебов по всему Советскому Союзу, при определении государственного бюджета, стоимости продукции промышленности и т. д.

Полезно сообщить учащимся, что большие числа имеют широкое применение в астрономии, биологии и других науках; так, например, расстояние от Земли до Солнца = $149\frac{1}{2}$ млн. *км*. В 1 *куб. см* крови насчитывается 5 млрд. красных кровяных телец». (А. Песков.)

После того как нумерация будет повторена на уроках, специально отведённых для этой цели, ею нужно заниматься и в дальнейшем в связи с повторением арифметических действий.

СЛОЖЕНИЕ.

Определение сложения может быть дано в следующей форме: «Сложением называется арифметическое действие, посредством которого находится сумма двух или нескольких слагаемых». В этой формулировке подчёркнута ц е л ь действия, в ней связаны в одно логическое целое все основные понятия, характерные для определяемого действия: арифметическое действие, сложение, сумма, слагаемые.

Так как это определение опирается на понятие суммы, то разумеется, что вначале надо дать определение суммы. На двух каких-либо совокупностях предметов (8 спичек и 6 спичек) показывается, что суммой двух данных чисел является такое число, которое содержит в себе все единицы этих чисел, взятых вместе. А действие, посредством которого находится сумма двух чисел, называется с л о ж е н и е м[1].

О с н о в н ы е с в о й с т в а с л о ж е н и я. С переместительным свойством сложения учащиеся уже встречались неоднократно и применяли его при решении примеров. Теперь нужно усвоить его точную формулировку («от перестановки слагаемых сумма не изменяется») и научиться сознательно пользоваться им для облегчения сложения и для проверки этого действия. Нужно приучить учащихся к тому, чтобы на предложение учителя «назовите переместительное свойство сложения» ученики могли ответить: «От перемены мест слагаемых (или от перестановки слагаемых) сумма не изменяется», а главное, чтобы они умели использовать его для лёгкого и быстрого решения примеров. Если при решении примеров: $191 + 250 + 9$; $187 + 50 + 13$ — ученик переставит слагаемые и благодаря этому быстро и правильно выполнит сложение, он этим покажет, что знает переместительное свойство сложения.

С о ч е т а т е л ь н ы м свойством сложения («При сложении слагаемые можно объединять в группы») учитель приучает учеников пользоваться чисто практически, при решении примеров. Если ученик при решении задачи или примера, где приходится находить сумму многих слагаемых, сгруппирует слагаемые, найдёт

---

[1] Определения действий для начальной школы необязательны.

сумму каждой группы, а затем общую сумму, то этим он покажет, что практическое применение сочетательного свойства им усвоено. Сочетательное свойство можно применять и при решении устных примеров с небольшими числами. Пусть дан пример: $26 + 14 + 25 + 48 + 12$; решение этого примера будет сильно облегчено, если слагаемые будут разбиты на три группы $(26 + 14) + 25 + (48 + 12)$. На подобных примерах учащиеся «почувствуют» сочетательное свойство сложения и оценят все выгоды его использования.

Решение примеров и задач на сложение. Техника письменного сложения уже усвоена учащимися в III классе; тем не менее при повторении сложения в IV классе нужно проделать несколько упражнений на сложение, предъявляя к учащимся более высокие требования: они должны производить сложение быстрее, уметь подписывать слагаемые одно под другим более рационально, если слагаемые с различным числом цифр, при сложении называть для скорости только результаты. Решение примеров сопровождается проверкой. Решение задач преследует цель подчеркнуть, в каких основных случаях применяется сложение. Учащиеся должны уметь составить задачи на те случаи, в которых применяется сложение.

Зависимость между слагаемыми и суммой.

Выяснение этой зависимости лучше всего провести на решении задач. Решим задачи:

1. «Ученик уплатил за тетради 40 коп. и за книгу 50 коп. Сколько стоила вся покупка?»

50 коп. + 40 коп. = 90 коп.

2. «Книга и тетради стоили вместе 90 коп. Книга стоила 50 коп. Сколько стоили тетради?»

90 коп. — 50 коп. = 40 коп.

3. «Книга и тетради вместе стоили 90 коп. Тетради стоили 40 коп. Сколько стоила книга?»

90 коп. — 40 коп. = 50 коп.

Сравнивая эти задачи и их решение, учащиеся устанавливают, что в первой задаче даны слагаемые, требуется найти их сумму; во второй же и третьей задачах дана сумма и требуется найти одно из слагаемых. Из решений видно, как именно находилось неизвестное слагаемое: от суммы отнимали данное в задаче слагаемое и в результате находили искомое слагаемое. Решив ещё три задачи, связанные между собой так же, как предыдущие, можно сделать выводы: а) «Неизвестное слагаемое равно сумме без другого слагаемого». б) «По сумме двух слагаемых и одному из них можно найти другое слагаемое».

После этого решаются примеры и задачи, в которых по данной сумме двух слагаемых и одному из них требуется найти дру-

гое слагаемое. Наконец, производится проверка сложения на основании зависимости между слагаемыми и суммой. Учитель даёт пример:

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 87\,504 \\ 10\,685 \end{array} \\
\hline
98\,189
\end{array}
$$

Учащиеся проверяют сложение путём вычитания: из суммы вычитают одно из слагаемых.

Изменение суммы.

Изменение суммы непосредственно вытекает из основного понятия о сложении и потому может быть выведено из этого понятия на примерах с небольшими числами. Задачи здесь нужны для иллюстрации и для применения выводов. Сначала показывается, что каждая единица, прибавленная к слагаемому, входит и в сумму:

$$15 + 5 = 20$$
$$16 + 5 = 21$$

Потом рассматривается изменение суммы:

а) от прибавления к слагаемым *нескольких* единиц:

$$12 + 6 = 18$$
$$16 + 6 = 22$$

б) от вычитания из одного слагаемого сначала *одной*, а потом *нескольких* единиц:

$$7 + 5 = 12 \qquad 16 + 8 = 24$$
$$6 + 5 = 11 \qquad 12 + 8 = 20$$

в) от одновременного увеличения одного слагаемого и уменьшения другого слагаемого на одинаковое число единиц:

$$14 + 6 = 20$$
$$12 + 8 = 20$$

Каждая пара примеров подробно разбирается (как изменилось в данном случае слагаемое, как изменилась сумма) и после этого делаются выводы:

1. Если слагаемое увеличить на несколько единиц, то и сумма увеличится на столько же единиц.

2. Если слагаемое уменьшить на несколько единиц, то и сумма уменьшится на столько же единиц.

3. Если одно слагаемое увеличить, а другое уменьшить на одно и то же число единиц, то сумма не изменится.

Эти выводы применяются на практике в устных вычислениях, когда приходится одно или оба слагаемых округлять.

Пусть требуется сложить 450 и 298. Чтобы сложить эти числа, округляем второе слагаемое до 300, увеличив его на 2 единицы.

Но от этого и сумма (750) увеличилась на 2 единицы. Чтобы получить верный результат, нужно от суммы отнять 2 единицы, получится 748.

ВЫЧИТАНИЕ.

В учебной и методической литературе имеется определение вычитания двоякого рода. В одном определении подчёркивается характерная особенность процесса вычитания — отнимание от данного числа другого данного числа. Вот, например, определение, приведённое в «Арифметике» Киселёва: «Действие, состоящее в том, что от одного числа отнимается столько единиц, сколько их содержится в другом данном числе, называется вычитанием». Достоинство этого определения заключается в его простоте и наглядности, а следовательно, и в доступности его для учащихся начальной школы.

Однако такое определение вычитания страдает тавтологией («вычитание есть отнимание»), не вскрывает истинной цели этого действия и не подчёркивает связи вычитания со сложением, как действия, обратного сложению.

Этих недостатков лишено определение, даваемое в такой форме: «Вычитание есть действие, обратное сложению; в нём по данной сумме двух слагаемых и одному из них отыскивается другое слагаемое».

Единственное возражение против такого определения — трудность его понимания и усвоения детьми. С этим приходится считаться и давать его, исходя из задачи. Возьмём задачи, аналогичные тем, на которых мы выясняли зависимость между слагаемыми и суммой:

1. «В роще 50 берёз и 25 сосен. Сколько всего деревьев в роще?»

$$50 + 25 = 75.$$

2. «В роще всего 75 деревьев — берёз и сосен. Берёз 50. Сколько сосен в роще?»

$$75 - 50 = 25.$$

3. «В роще всего 75 деревьев — берёз и сосен. Сосен 25. Сколько берёз в роще?»

$$75 - 25 = 50.$$

Сравнивая эти задачи, сопоставляя действия, которыми они решаются, учащиеся устанавливают, что при сложении (первая задача) слагаемые даются, а сумма отыскивается. При вычитании же (вторая и третья задачи) даются сумма и одно из слагаемых, а другое слагаемое отыскивается. Значит, число, которое при сложении отыскивается, при вычитании даётся, и наоборот. Поэтому говорят, что вычитание есть действие, обратное сложению; в нём по данной сумме двух слагаемых и одному из них отыскивается другое слагаемое. В вычитании эта сумма называется

уменьшаемым, а данное слагаемое вычитаемым; искомое же слагаемое называется остатком или разностью.

После такого объяснения можно дать определение вычитания в окончательной форме.

Решение примеров и задач на вычитание. Хотя техника вычитания в III классе и усвоена, тем не менее всё вычитание в целом и особенно наиболее трудные случаи этого действия нуждаются в повторении и дальнейшем закреплении. В упражнениях надо обратить особое внимание на те случаи вычитания, когда в уменьшаемом встречается подряд несколько нулей, например: 2 000 006 — 643 577, 8 100 100 — 7 056 234.

Давая примеры на вычитание, нужно всячески разнообразить задания с тем, чтобы приучить учащихся к принятой в вычитании терминологии.

Вот образцы таких заданий:

а) Вычти из числа 20 100 число 8 975.
б) Найди разность двух чисел: 15 008 и 3 750.
в) Уменьши число 2 100 на 1 645.
г) Вычисли, на сколько 4 738 больше 2 369.
д) Уменьшаемое 41 560, вычитаемое — 29 780. Найди остаток.

Учащийся IV класса должен знать, что все эти вопросы и задания решаются при помощи вычитания.

Наряду с примерами решаются и задачи, в которых находят применение различные случаи вычитания: при уменьшении данного числа на несколько единиц, при нахождении остатка, при нахождении разности.

Учащиеся должны твёрдо знать эти случаи применения вычитания и уметь составить на каждый случай простую задачу.

Зависимость между уменьшаемым, вычитаемым и разностью.

Эта зависимость выясняется сначала на задачах, потом на примерах.

Задача: «В библиотечном шкафу было 200 книг. 50 книг выдали учащимся. Сколько книг осталось в шкафу?»

200 кн. — 50 кн. = 150 кн.

Сложим выданные книги (50) с оставшимися (150), получим опять 200 книг: 50 кн. + 150 кн. = 200 кн.

Если бы число книг в шкафу было неизвестно, а известно было бы только то, что когда выдали 50 книг, то осталось 150 книг, можно ли было бы узнать, сколько всего книг находилось в шкафу до выдачи? Очевидно, можно. Для этого достаточно сложить 50 и 150.

Уменьшаемое нашли, сложив вычитаемое и остаток. Следовательно, если к вычитаемому прибавить остаток, получится уменьшаемое.

После этого решается несколько примеров на вычитание, на которых выясняется, что: 1) если к вычитаемому прибавить остаток, то получится уменьшаемое, 2) если от уменьшаемого отнять разность, то получится вычитаемое.

Эти выводы в конечном результате формулируются так: «Уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному с остатком. Вычитаемое равно уменьшаемому без остатка или разности».

Эти выводы закрепляются на решении примеров с x и задач.

Изменение разности.

Изменение разности рассматривается сначала в зависимости от изменения уменьшаемого, потом в зависимости от изменения вычитаемого и, наконец, в зависимости от увеличения (уменьшения) уменьшаемого и вычитаемого на одно и то же число. Последнее рассматривается для того, чтобы показать, при каких условиях разность не изменяется.

Объяснение ведётся сначала на примерах, а потом — на задачах. Примеры можно расположить в следующем порядке:

Изменение уменьшаемого.

1) 14 — 6 = 8
16 — 6 = 10
1) Уменьшаемое у в е л и ч и л и на 2, и разность увеличилась на 2.

2) 18 — 2 = 16
12 — 2 = 10
2) Уменьшаемое у м е н ь ш и л и на 6, и разность уменьшилась на 6.

Изменение вычитаемого.

3) 10 — 2 = 8
10 — 6 = 4
3) Вычитаемое у в е л и ч и л и на 4, разность уменьшилась на 4.

4) 12 — 6 = 6
12 — 3 = 9
4) Вычитаемое у м е н ь ш и л и на 3, разность увеличилась на 3.

5) 20 — 8 = 12
25 — 13 = 12
5) Уменьшаемое и вычитаемое увеличили на 5, разность не изменилась.

6) 26 — 4 = 22
24 — 2 = 22
6) Уменьшаемое и вычитаемое уменьшили на 2, разность не изменилась.

В ы в о д ы

«Если уменьшаемое увеличить на несколько единиц, то и разность увеличится на столько же единиц».

«Если уменьшаемое уменьшить на несколько единиц, то и разность уменьшится на столько же единиц».

Отсюда следует, что уменьшаемое и разность изменяются одинаково: увеличивается уменьшаемое, увеличивается и разность; уменьшается уменьшаемое, уменьшается и разность.

«Если вычитаемое увеличить на несколько единиц, то разность уменьшится на столько же единиц».

«Если вычитаемое уменьшить на несколько единиц, то разность увеличится на столько же единиц».

Отсюда следует, что вычитаемое и разность изменяются не-

одинаково: вычитаемое увеличивается, а разность уменьшается, вычитаемое уменьшается, а разность увеличивается.

«Если уменьшаемое и вычитаемое увеличить или уменьшить на одно и то же число, то разность останется без изменения».

Понимание изменения разности с изменением уменьшаемого даётся детям сравнительно легко, но характер изменения разности в зависимости от изменения вычитаемого усваивается учащимися с трудом. Поэтому выводы, делаемые на основании числовых примеров, надо подкреплять ссылкой на известные детям факты и примеры из жизни, например: «У двух мальчиков было орехов поровну, но один съел из своих орехов больше, а другой — меньше; у кого остаток больше? Очевидно, у того, кто меньше съел. У кого остаток меньше? У того, кто больше съел».

«Двое покупателей имели денег поровну, но один из них купил вещь подороже, другой подешевле. У кого осталось денег больше?» Из этих фактов сам собой напрашивается вывод: больше расходуешь (отнимаешь), меньше остаётся; меньше расходуешь (вычитаешь), больше остаётся. Перенося этот вывод на вычитаемое, скажем: больше вычитаемое — меньше остаток, меньше вычитаемое — больше остаток (при неизменяющемся уменьшаемом).

Знание зависимости между членами вычитания закрепляется на решении задач. Кроме решения задач, хорошим упражнением в изучении изменения разности служит решение вопросов, подобных следующим:

«Разность двух чисел равна 25. Как изменится эта разность, если уменьшаемое увеличим на 35? если вычитаемое уменьшим на 20?» «Уменьшаемое увеличили на 15. Что надо сделать с вычитаемым, чтобы разность не изменилась?»

Наконец, хорошее практическое приложение находят выводы об изменении разности в устном счёте, когда приходится округлять уменьшаемое или вычитаемое.

Пусть дано отнять 275 от 499 (499 — 275). Округлим 499 до 500 и вычтем 275 из 500. Получим 225. Так как округляя 499 до 500, мы увеличили уменьшаемое на 1 единицу, то и разность увеличилась на 1 единицу. Отняв 1 единицу от 225, мы получим правильный остаток — 224.

УМНОЖЕНИЕ.

Для умножения можно дать такое определение: «Умножение есть сложение равных слагаемых». К пониманию этого определения ученики подготовлены упражнениями в замене сложения равных слагаемых умножением и в замене умножения сложением равных слагаемых, что проделывалось неоднократно на протяжении трёх предыдущих лет обучения. Теперь нужно только воспроизвести эти операции. Обозначив сумму нескольких равных слагаемых, например $6 + 6 + 6 + 6$, нужно спросить, каким дей-

ствием можно заменить сложение этих четырёх шестёрок (умножением 6 на 4).

Обратная операция: написав пример на умножение (например 9×6), нужно дать задание — заменить это умножение сложением. Получится: $9+9+9+9+9+9=54$. После этого уместно спросить: «Что же значит 9 умножить на 6?» (Это значит число 9 повторить слагаемым 6 раз.) От этих частных фактов можно перейти к определению, поставив вопрос: «Что же такое умножение?», имея в виду ответ: «Умножение — это сложение равных слагаемых».

Переместительное свойство умножения («От перестановки сомножителей произведение не изменяется»). С этим свойством умножения учащиеся встречались уже неоднократно — во II и III классах, но там они рассматривали его исключительно с точки зрения его практического использования при решении примеров. В IV классе учащиеся усваивают формулировку этого свойства, осознают его именно как свойство умножения (ученики должны уметь ответить на вопрос: «В чём состоит переместительное свойство умножения?»); сформулировав это свойство, они должны уметь проиллюстрировать его на примере и объяснить, почему, допустим, произведение чисел $12 \times 34 \times 56$ равно произведению чисел $34 \times 12 \times 56$, и, наконец, что всего важнее, они должны уметь пользоваться на практике перестановкой сомножителей для более лёгких и скорых вычислений, главным образом при устном решении примеров типа: $4 \times 17 \times 25$; $2 \times 29 \times 5$, и при проверке умножения.

Решение примеров и задач на умножение. Повторяя решение примеров, надо особое внимание уделить тем случаям, когда один или оба сомножителя оканчиваются нулями или имеют нули в середине. В этих так называемых частных случаях умножения учащиеся иногда делают ошибки (о способах решения таких примеров см. подробные объяснения на стр. 280—286). Ученики IV класса должны уметь формулировать правила, по которым производится умножение в различных случаях.

Предлагая примеры на умножение, нужно по возможности разнообразить форму заданий с тем, чтобы научить учащихся пользоваться терминологией умножения и подчеркнуть смысл этого действия. «Умножьте 940 на 6 800». «Найдите произведение двух чисел: 5 300 и 648». «Число 284 увеличьте в 38 раз». Все эти выражения должны найти своё место в речи учителя.

При решении задач на умножение в тех случаях, когда умножение употребляется для увеличения числа в несколько раз, нужно требовать от ученика объяснения, почему он производит умножение (например, в задаче сказано, что в Советском Союзе затрачено на машиностроение в 28 раз больше, чем в царской России; следовательно, нужно (такое-то число) увеличить в

28 раз, а для этого нужно данное число умножить на 28). Здесь термины «во столько-то раз больше», «увеличить», «умножить» тесно ассоциируются между собой.

Зависимость между сомножителями и произведением.

Эту зависимость можно выяснить на задачах.

1. «Ученик купил 5 карандашей, по 18 коп. за карандаш. Сколько он уплатил за все карандаши?»

$$18 \text{ коп.} \times 5 = 90 \text{ коп.}$$

2. «Ученик купил 5 карандашей за 90 коп. Сколько стоит один карандаш?»

$$90 \text{ коп.} : 5 = 18 \text{ коп.}$$

3. «Ученик купил карандашей на 90 коп., уплачивая за каждый карандаш по 18 коп. Сколько карандашей купил ученик?»

$$90 \text{ коп.} : 18 \text{ коп.} = 5 \text{ (карандашей).}$$

Разбирая эту группу задач, мы устанавливаем, что в первой задаче даны множимое и множитель, требовалось найти произведение. Во второй задаче даны множитель и произведение, требовалось найти множимое. Как мы его нашли?— Произведение разделили на множитель и получили множимое. В третьей задаче даны произведение и множимое. Требовалось найти множитель. Как мы его нашли? — Произведение разделили на множимое и получили множитель.

Возьмём пример: $24 \times 5 = 120$, и на нём проверим то соотношение, которое мы выявили на задачах. Разделив 120 на 5, получим 24. Разделив 120 на 24, получим 5. Это можно записать так:

$$24 = 120 : 5; \quad 5 = 120 : 24.$$

Читаются эти равенства так: «Множимое равно произведению, делённому на множитель. Множитель равен произведению, делённому на множимое. Или: каждый сомножитель равен произведению, делённому на другой сомножитель».

Эти выводы проверяются на нескольких примерах и запоминаются учащимися.

Зная зависимость между множимым, множителем и произведением, можно найти неизвестное множимое, если даны множитель и произведение, и неизвестный множитель, если даны множимое и произведение. Как? Стоит только разделить произведение на множитель, и мы получим множимое; или же разделить произведение на множимое, и получится множитель. Решим примеры с неизвестным множимым и неизвестным множителем, обозначая неизвестное через x:

1. $x \times 7 = 84$. Пример читается так: некоторое число умножили на 7 и в произведении получили 84. Какое число умножили на 7?

Здесь даны множитель и произведение. Неизвестно множимое. Мы знаем, что множимое равно произведению, делённому на множитель. Поэтому

$$x = 84 : 7 = 12. \text{ Проверим: } 12 \times 7 = 84.$$

2. $14 \times x = 210$. В этом примере даны множимое и произведение. Неизвестен множитель. Множитель равен произведению, делённому на множимое. Поэтому $x = 210 : 14 = 15$. Действительно, если 14 умножить на 15, получится 210.

Упражнения в отыскании неизвестного сомножителя заканчиваются использованием этого навыка для проверки умножения. Как проверить равенство $365 \times 24 = 8\,760$? 284 умножили на 16 и получили в произведении 4 544. Верно ли сделано умножение? Ответ на эти вопросы потребует практического применения только что изученной зависимости между членами умножения.

Изменение произведения.

Изменение произведения в IV классе рассматривается в зависимости от увеличения и уменьшения числа в н е с к о л ь к о р а з. Случаи же изменения, связанные с увеличением и уменьшением сомножителей н а н е с к о л ь к о е д и н и ц, здесь не затрагиваются. Изучение вопроса идёт чисто опытным путем: учащиеся наблюдают изменения на конкретных примерах, сопоставляют, сравнивают их и делают обобщения, выводы.

Выводы и первые обобщения делаются на примерах, а не на задачах. Решение задач является вторым этапом работы; на них находят как бы практическое применение те выводы, которые сделаны на рассмотрении примеров.

Объяснение даётся в следующей системе: сначала рассматриваются и анализируются три пары примеров, в которых изменяется (увеличивается) множимое.

1) $8 \times 5 = 40$	2) $4 \times 3 = 12$	3) $12 \times 2 = 24$
$16 \times 5 = 80$	$20 \times 3 = 60$	$36 \times 2 = 72$

Разбор примеров ведётся примерно так:

«Прочитайте первый пример». (8 умножить на 5, будет 40.) «Прочитайте второй пример». (16 умножить на 5, будет 80.) «Что общего в этих примерах?» (Общий множитель — 5.) «Чем отличается второй пример от первого?» (Множимым и произведением.) «Во сколько раз множимое во втором примере больше множимого в первом примере?» (В 2 раза больше.) «Во сколько раз произведение во втором примере больше произведения в первом примере?» (В 2 раза.)

Следовательно, во втором примере множимое увеличили в 2 раза, и произведение увеличилось тоже в 2 раза.

Разобрав так же следующие две пары примеров, учащиеся делают вывод: «Если множимое увеличить в несколько раз, то и произведение увеличится во столько же раз».

Дальше рассматриваются случаи изменения произведения в связи с у м е н ь ш е н и е м множимого:

1) $10 \times 4 = 40$	2) $12 \times 6 = 72$	3) $24 \times 2 = 48$
$5 \times 4 = 20$	$4 \times 6 = 24$	$6 \times 2 = 12$

На основе разбора этих примеров делается вывод: «Если множимое уменьшить в несколько раз, то и произведение уменьшится во столько же раз».

Следующий этап объяснения: изменение множителя — сначала увеличение, потом его уменьшение в несколько раз и формулировка выводов:

«Если множитель увеличить в несколько раз, то произведение увеличится во столько же раз».

«Если множитель уменьшить в несколько раз, то и произведение уменьшится во столько же раз».

Сделанные выводы закрепляются на решении задач-вопросов, в которых:

а) Даются множимое и множитель, вычисляется произведение; затем указывается, во сколько раз нужно увеличить или уменьшить один из сомножителей, и ставится вопрос — каково будет произведение? Например: множимое 20, множитель 5; найти произведение. Каково будет это произведение, если множимое увеличить в 3 раза? если множитель увеличить в 4 раза? и т. д.

б) Указывается, как изменяется один из сомножителей, и требуется узнать, как в зависимости от этого изменится произведение. Например: множимое увеличено в 5 раз; что сделается с произведением? Множитель уменьшен в 2 раза; что сделается с произведением?

в) Даётся произведение и указывается, как изменяется один из сомножителей; требуется вычислить новое произведение. Например: произведение двух чисел равно 60; множимое увеличили в 5 раз; чему будет равно новое произведение? Множитель уменьшили в 3 раза; вычислить произведение и т. д.

Но особенно ярко и выпукло выступает смысловая сторона вопроса об изменении произведения в задачах, подобных следующей:

1. «Два самолёта вылетели с аэродрома. Один из них пролетел 1 200 *км*. Сколько километров пролетел за то же время другой самолёт, если скорость его была вдвое больше?»

Решаются такие задачи устно, без записи, без постановки вопросов, исключительно на основании рассуждения. Расстояние, сделанное вторым самолётом, больше, чем 1 200 *км*, потому что скорость второго самолёта больше: оно больше, чем 1 200 *км*, в 2 раза, потому что его скорость в 2 раза больше. Чтобы узнать, чему равно это расстояние, нужно 1 200 увеличить в 2 раза, получится 2 400.

Такой способ решения основан на прямой пропорциональной зависимости между скоростью и расстоянием при одинаковом времени полёта. Чтобы построить решение этой задачи на изменении произведения, нужно рассматривать 1 200 как произведение, скорость как множимое и время как множитель.

I самолёт. Скорость $\times$ время = расстоянию (1 200 *км*).

II самолёт. Скорость $\times$ время = расстоянию.

Сравним скорости (множимые) первого и второго самолётов. Скорость второго самолёта в 2 раза больше скорости первого самолёта. Значит, множимое во второй записи в 2 раза больше множимого в первой записи.

А если множимое больше в 2 раза, то произведение, или расстояние, тоже в 2 раза больше.

Из приведённого рассуждения видно, что такие задачи в силу своей отвлечённости нелегки для учащихся, поэтому их можно привести только как пример практического приложения полученных знаний об изменении произведения.

ДЕЛЕНИЕ.

Деление есть действие, обратное умножению; в нём по данному произведению двух сомножителей и одному из них отыскивается другой сомножитель.

К определению деления нужно подвести учащихся путём решения задач. Решим две задачи с записью решения:

1. «В один день рабочий зарабатывает 20 руб. Сколько рублей он заработает в месяц (25 рабочих дней)?»

$$20 \text{ руб.} \times 25 = 500 \text{ руб.}$$

В этой задаче дано множимое — 20 руб., множитель — 25. Требуется найти их произведение. Перемножив эти числа, получаем произведение — 500 руб.

2. «Рабочий заработал за 25 дней 500 руб. Сколько рублей он зарабатывал в один день?»

$$500 \text{ руб.} : 25 = 20 \text{ руб.}$$

Сравним вторую задачу и её решение с первой задачей. В первой задаче дано множимое (20) и множитель (25); требуется найти произведение (500). Во второй задаче даны произведение (500) и множитель (25); отыскивается множимое (20).

При умножении произведение отыскивается, а при делении произведение даётся; при умножении сомножители даются, а при делении они отыскиваются. Значит, деление есть действие, обратное умножению.

Что в нём даётся и что отыскивается? *Даётся произведение двух чисел и один сомножитель. Отыскивается другой сомножитель.* Соединим обе фразы и получим определение деления.

Напишем пример на деление 80 : 4 = и разберём, что в нём дано и что отыскивается (дано произведение двух чисел — 80, из них одно число — 4, требуется найти другое число).

В делении эти числа имеют своё название: произведение носит название *делимого*, множимое или множитель называется *делителем*; тот сомножитель, который отыскивается, называется *частным*.

Каждой задаче на умножение соответствуют две задачи на деление. Надо дать ученикам задачу на умножение и предложить им составить самостоятельно две соответствующие ей задачи на деление.

Решение примеров и задач на деление. Техника письменного деления является наиболее сложной по сравнению с другими действиями, поэтому для выработки навыков в делении требуется большее количество упражнений и более частое повторение. В III классе учащиеся усвоили эту технику; в IV классе её нужно совершенствовать, добиваясь большей правильности, большей скорости и большей уверенности в выполне-

нии деления. При этом надо дать больше упражнений на те случаи деления, когда в частном получаются нули, а также на деление с остатком, когда на конце частного должны быть поставлены нули. Предлагая примеры на деление, надо разнообразить задания, с тем чтобы приучить детей к терминологии деления и к различным случаям применения этого действия. «Разделить 87 512 на 25»; «Делимое 2 720, делитель 340; найти частное». «Узнайте, во сколько раз 4 600 больше 920» — в такой форме могут быть предлагаемы примеры.

Особенно нужно разнообразить вопросы при устном счёте: «Сколько раз 15 содержится в 60?»; «Во сколько раз 75 больше 25?»; «Во сколько раз 17 меньше 102?»; «120 уменьшить в 30 раз»; «Найти шестую часть 96» и др. Эти упражнения имеют целью дать учащимся твёрдое знание тех основных случаев, в которых применяется деление. Главным же средством для достижения этой цели служит решение задач устных и письменных. Задачи нужно давать с таким содержанием, чтобы были исчерпаны все случаи применения деления. Ещё раз нужно сопоставить здесь деление на равные части и деление по содержанию и добиться полной ясности в различении этих видов деления и правильной записи каждого из них.

Зависимость между делимым, делителем и частным.

Эта зависимость, как известно, выражается в следующем:

Если делитель и частное перемножить, то получится делимое. Если делимое разделить на частное, то получится делитель.

Можно эту же зависимость сформулировать и несколько иначе, а именно:

Делимое равно делителю, умноженному на частное. Делитель равен делимому, делённому на частное.

Зависимость между компонентами деления можно выявить на примерах:

1. $42 : 3 = 14$. Делимое : делитель = частное.
2. $3 \times 14 = 42$. Делитель × частное = делимое.
3. $42 : 14 = 3$. Делимое : частное = делитель.

Прочитаем вторую строчку: «Если делитель умножить на частное, получится делимое».

Прочитаем третью строчку: «Если делимое разделить на частное, получится делитель».

Выявим эту зависимость на второй группе примеров:

$48 : 12 = 4$. Делимое : делитель = частное.

$12 \times 4 = 48$. Делитель × частное = делимое. Делимое = делителю × частное.

$48 : 4 = 12$. Делимое : частное = делитель. Делитель = делимому : частное.

Далее ученики решают ряд примеров на деление и проверяют на них сделанные выводы о зависимости между компонентами деления.

Заканчиваются упражнения решением примеров с x и использованием знания зависимости для проверки деления, например: $x : 72 = 15$; $2\,400 : x = 96$; $13\,815 : 45$ — решить и проверить умножением и делением.

Решая первый пример, ученики рассуждают так: «В этом примере неизвестно делимое. Делимое равно делителю, умноженному на частное». Или: «Если делитель умножить на частное, получится делимое. Следовательно, чтобы найти делимое, нужно 72 умножить на 15.

Перемножим эти числа, получается 1080. Делимое равно 1080. Запишем это: $x = 1080$. Проверим: $1080 : 72 = 15$».

Изменение частного.

Изменение частного изучается в том же плане, как и изменение произведения. В начальной школе рассматриваются только те случаи изменения частного, когда делимое или делитель увеличивается или уменьшается в несколько раз; кроме того, рассматривается неизменяемость частного при одновременном увеличении или уменьшении и делимого, и делителя в одинаковое число раз. Знание этого свойства частного нужно учащимся в V классе при изучении деления десятичных дробей и при изучении отношений.

Сначала рассматривается изменение частного в зависимости от увеличения и уменьшения делимого.

Объяснение ведётся на задачах и примерах:

Задача: «Мать раздала трём своим детям поровну утром 6 конфет, а вечером 12 конфет. Во сколько раз больше получил конфет каждый ребёнок вечером, чем утром?»

Решение задачи записывается в две строки:

$$6 : 3 = 2$$
$$12 : 3 = 4$$

Получив от учащихся ответ: «в 2 раза больше», учитель ставит вопрос: «Почему во второй строчке в частном получилось в 2 раза больше, чем в первой?» (Потому, что во второй строчке делимое в 2 раза больше.)

Задача: «Артель рабочих из 4 человек в первую неделю заработала 300 руб., а во вторую — 600 руб. Во сколько раз больше заработал каждый рабочий во вторую неделю, чем в первую?»

Решение этой задачи записывается так же, как предыдущей:

$$300 : 4 = 75$$
$$600 : 4 = 150$$

Анализируя и сопоставляя обе строки, учащиеся устанавливают, что во второй строке делимое больше в 2 раза, поэтому и частное больше в 2 раза.

Далее изменение частного выясняется на примерах:

1) $15 : 5 = 3$ 2) $21 : 7 = 3$
$90 : 5 = 18$ $63 : 7 = 9$.

На основе анализа задач и примеров делается вывод: «*Если делимое увеличить в несколько раз, то и частное увеличится во столько же раз*». Учащиеся

несколько раз повторяют этот вывод и сами составляют по 2—3 примера, подтверждающие это положение.

Таким же путём на основе задач и примеров делается вывод об изменении частного в зависимости от уменьшения делимого: «Если делимое уменьшить в несколько раз, то и частное уменьшится во столько же раз».

Значительно сложнее обстоит дело с изменением частного в зависимости от изменения делителя,— этот случай изменения частного даётся детям труднее. Поэтому на изменении частного в зависимости от изменения делителя следует остановиться дольше, дать больше иллюстраций и жизненных примеров.

Исходным моментом выяснения этой зависимости служит задача, например:

«Один мальчик разложил 12 карандашей в 2 коробки, а другой столько же карандашей разложил в 4 коробки. У которого мальчика в коробке будет карандашей меньше? во сколько раз меньше?»

Запишем решение этой задачи в две строки:

$$12 : 2 = 6$$
$$12 : 4 = 3$$

Эти примеры анализируются и выясняется, что если делитель увеличивается, то частное уменьшается. Это подтверждается примерами:

$$36 : 3 = 12$$
$$36 : 12 = 3$$

«Допустим, что мы делим яблоки между ребятами. Если ребят больше, то каждому достанется яблок меньше. 60 яблок разделим поровну между 2, 4, 10, 12, 15, 30 детьми. Сколько в каждом случае достанется яблок одному ребёнку?»

$60 : 2 = 30$
$60 : 4 = 15$
$60 : 6 = 10$
$60 : 10 = 6$
$60 : 12 = 5$
$60 : 15 = 4$
$60 : 20 = 3$
$60 : 30 = 2$

Здесь делители — число ребят, получающих яблоки,— увеличиваются: 2, 4, 6, 10 и т. д., а частные — число полученных каждым ребёнком яблок — уменьшаются: 30, 15, 10, 6, 5, 4, 3, 2.

Можно проиллюстрировать уменьшение частного от увеличения делителя и на чертеже. Возьмём два равных отрезка в 12 *см* и разделим первый на 3 части, а второй на 6 частей.

Сделаем вывод: «Если делитель увеличить в несколько раз, то частное уменьшится во столько же раз».

На аналогичных примерах объясняется увеличение частного при уменьшении делителя: «Если делитель уменьшить в несколько раз, то частное увеличится во столько же раз».

Дальше остаётся выяснить, что делается с частным, если делимое и делитель одновременно увеличить или уменьшить в оди-

наковое число раз. Надо показать учащимся, что частное при этом не изменяется. Лучше всего это сделать на рассмотрении двух-трёх примеров, расчленив этот вопрос на две части: сначала делимое и делитель *увеличиваются* в одинаковое число раз, а потом они *уменьшаются* в одинаковое число раз.

а) 15 : 3 = 5
   30 : 6 = 5
б) 24 : 4 = 6
   72 : 12 = 6
в) 25 : 5 = 5
   2 500 : 500 = 5

Рассматривая и объясняя первый пример, ученик рассуждает так: «Когда мы делимое увеличили в 2 раза (15 × 2), то частное увеличилось в 2 раза (5 × 2 = 10), но когда мы делитель тоже увеличили в 2 раза (3 × 2), то частное от этого уменьшилось в 2 раза (10 : 2 = 5).

Если же мы какое-либо число сначала увеличим вдвое, а потом тут же уменьшим его вдвое, то оно останется без изменения».

Разберём так же второй и третий примеры и сделаем вывод: «*Если делимое и делитель одновременно увеличить в одинаковое число раз, то частное не изменится*».

Учащиеся этот вывод повторяют, запоминают и проверяют его на самостоятельно составленных примерах.

Таким же точно путём объясняется *неизменяемость* частного при *уменьшении* делимого и делителя в одинаковое число раз, причём среди чисел, на которых объясняется это свойство частного, должны быть числа и с нулями на конце, например:

а) 60 : 20 = 3
   6 : 2 = 3

б) 1 000 : 200 = 5
   10 : 2 = 5

Этих примеров достаточно, чтобы сделать вывод: «*Если делимое и делитель одновременно уменьшим в одинаковое число раз, то частное не изменится*». Надо следить за правильной формулировкой этих выводов; дети на первых порах часто ошибаются, говоря: «на одинаковое число раз», или просто «на одинаковое число», или «в несколько раз» вместо «в *одинаковое* число раз». При каждой ошибке надо поправлять ученика, объясняя ему, в чём именно заключается его ошибка.

Сделанный вывод нужно сейчас же использовать для сокращённого деления чисел, оканчивающихся нулями.

Разделим 42 000 на 2 800.

```
42000 |2800
2800   15
-----
14000
14000
-----
    0
```

Это деление можно сделать проще, сведя его к делению небольших чисел. Уменьшим делимое и делитель в 100 раз, отбросив мысленно по два нуля и разделив 420 на 28; от этого частное не изменится.

```
42000 |2800
28     15
-----
140
140
-----
  0
```

Частное получилось прежнее — 15, но при делении мы имели дело с небольшими числами — 420 и 28.

Тут же нужно напомнить учащимся, что в случае деления с остатком к частному должны быть приписаны отброшенные нули.

При проверке усвоения учащимися свойства неизменяемости частного учитель должен ставить вопрос в двоякой форме:

1) «Что сделается с частным, если делимое и делитель увеличим или уменьшим в одинаковое число раз?»; 2) «Когда частное остаётся без изменения?»

Упражнения в изменении частного проводятся в следующей системе:

а) Даётся изменение делимого и делителя; требуется найти изменение частного, например: «Что сделается с частным, если делимое увеличить в 3 раза? если делитель уменьшить в 5 раз? если делимое уменьшить в 10 раз?»

б) Даётся частное и указывается изменение делимого или делителя. Найти изменённое частное, например: «Частное от деления двух чисел 15. Чему будет равно частное, если делимое увеличим в 2 раза? если делимое уменьшим в 3 раза? если делитель уменьшим в 5 раз? если делитель увеличим в 3 раза?»

в) Даётся изменение частного. Определить, что для этого надо сделать с делимым или с делителем, например «Надо увеличить частное в 3 раза; что для этого надо сделать с делимым? Частное надо уменьшить в 5 раз; что для этого надо сделать с делителем? с делимым?»

г) Даётся изменение делимого (делителя); требуется указать, что надо сделать с делителем (с делимым), чтобы частное не изменилось, например: «Делимое увеличили в 10 раз; что надо сделать с делителем, чтобы частное осталось без изменения?»

д) Применение изменений частного к вычислениям.

Примерная контрольная работа после повторения нумерации и изучения зависимости между компонентами сложения и вычитания и изменения суммы и разности.

На проведение контрольной работы с её последующим разбором целесообразно уделять 2 урока с тем, чтобы на одном уроке контрольную работу провести, а на другом проанализировать её и исправить ошибки, которые окажутся более или менее массовыми, типичными. Приведём примерное содержание контрольной работы для проверки нумерации, сложения и вычитания.

1. Запишите цифрами число 50 миллионов 25 тыс.
2. Сколько всего сотен в числе 32 786?
3. Как найти неизвестное слагаемое по данной сумме и другому слагаемому?
4. В каком порядке удобнее сложить числа в примере: $87 + 36 + 13 + 64$?
5. Найти разность двух чисел: 600 100 и 95 408.
6. Найти неизвестное уменьшаемое в примере:

$$x - 327 = 1260$$

7. Что сделается с разностью, если вычитаемое уменьшить на 6 единиц?
8. Проверить двумя способами вычитание:

$$\begin{array}{r} -\,1\,754 \\ 958 \\ \hline 796 \end{array}$$

Вторая контрольная работа — после изучения умножения и деления — составляется аналогично данной работе.

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ.

ИМЕНОВАННЫЕ ЧИСЛА.

Значение этой темы состоит в том, что, знакомя учащихся с установленными мерами и обучая их различного рода измерениям (длины, веса, стоимости, ёмкости) и действиям с составными именованными числами, школа вооружает учащихся такими знаниями и навыками, которые необходимы человеку на каждом шагу в его практической деятельности.

Знакомство с мерами начинается с I класса и служит подготовкой к действиям над составными именованными числами, которые изучаются в IV классе. Чтобы вычисления с составными именованными числами производить правильно, нужно хорошо знать меры, иметь точное и конкретное представление о единицах измерения, иметь понятие о простом и составном именованном числе. В свою очередь действия с составными именованными числами способствуют твёрдому усвоению мер и единичных отношений между ними.

МЕРЫ.

(I и II классы.)

В I классе даётся сравнительно большой объём знаний о мерах и навыки измерения ими. Здесь учащиеся знакомятся с мерами длины — метром и сантиметром, с мерами веса — килограммом, с мерами ёмкости — литром, с мерами времени — сутками, часами, и с мерами стоимости — с монетами в 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 копеек и 1 рубль.

Знакомство с метром даётся в процессе изучения первого десятка в связи с решением задач. В задачах нередко встречается слово «метр»: «купили 5 метров материи», «длина класса 8 метров» и т. д. Чтобы учащиеся вполне осмысленно относились к этому понятию, нужно дать детям наглядное знакомство с метром и поупражнять их в измерении метром. Знакомство с метром производится следующим образом: а) учитель показывает ученикам демонстрационный метр для непосредственного зрительного восприятия; б) дети сами изготовляют метр из бумажных полос, пользуясь готовым эталоном метра; в) проводятся упражнения, способствующие «запоминанию» величины метра: разводом рук дети показывают расстояние в один метр; сравнивают расстояние от левого плеча до конца пальцев правой вытянутой руки (это расстояние равно приблизительно одному метру); чертят на доске линию в один метр; называют в классе предметы размером в один метр или расстояния, равные приблизительно одному метру.

Упражнения в измерении бывают двоякого рода: а) измерение данного расстояния, например: измерение длины класса, длины коридора, ширины тех же помещений, высоты шкафа и вообще измерение тех предметов, размеры которых равны целому числу

метров; б) отмеривание расстояний, равных данному числу метров, например: отмерить 8 метров шпагата, отмерить расстояние в 5 метров по длине или по ширине класса.

Всякое полученное при измерении число записывается, например: 8 метров, 5 метров и т. д. Но вскоре после ознакомления с метром (на 3-м — 4-м уроке) учитель показывает ученикам сокращённую запись слова «метр» одной буквой *м* (без точки): 8 *м*, 5 *м*, 3 *м* и т. д.

Можно давать измерительные работы в качестве домашнего задания: измерить длину и ширину своей комнаты, своей кровати и др.

В таком же плане даётся в 3-й четверти знакомство и с сантиметром.

Ознакомление учащихся с километром приурочивается к изучению тысячи во II классе и используется для конкретизации числа 1 000: в километре 1 000 метров. Для того чтобы создать у детей вполне конкретное и точное представление о километре, надо вывести учеников на открытую местность и показать на ней несколько расстояний, равных одному километру (например от школы до опушки леса, до полотна железной дороги, до высокого дерева и т. д.). Весьма желательно, чтобы в весеннее время школьники при помощи мерной верёвки в 10 *м* или 20 *м* отмерили по прямой дороге расстояние в 1 километр или в крайнем случае в 100 *м*; 10 последних расстояний и составят 1 километр — это ученикам нетрудно представить. Познакомив с километром, надо предложить ученикам назвать по памяти некоторые известные им расстояния в 1 километр, а затем учитель называет расстояния и в несколько километров, например расстояние от своей школы (села, города) до соседнего города, до районного центра, до соседней станции железной дороги и т. д.

Для конкретизации представления о километре полезно решать задачи со скоростями, указав ученикам среднюю скорость движения человека, лошади, поезда, самолёта:

Скорость	пешехода . . .	4 *км* в час
»	лошади рысью .	10 *км* » »
»	поезда	40 *км* » »
»	самолёта . . .	400 *км* » »

После таких упражнений можно вводить в текст задач термин «километр», рассчитывая на точное представление учащимися этой меры.

Ознакомление с мерами веса — килограммом, граммом — и практика отвешивания. Знакомство с килограммом даётся также в первом полугодии I класса, исходя из решения задач, в которых фигурирует термин «килограмм». Ученикам сообщается, что килограмм — мера веса и даётся совершенно наглядное представление об этой мере: а) показываются гири в 1 *кг*, 2 *кг*, 5 *кг*; б) гиря и различные предметы весом

в 1 *кг* даются в руки учащимся, чтобы они получили мускульное ощущение тяжести в 1 *кг* и могли определять вес в 1 *кг* приблизительно без взвешивания; в) показываются весы и процесс отвешивания хлеба, картофеля и других предметов, удобных для взвешивания.

Каждое полученное при взвешивании число записывается, например: 2 килограмма, 5 килограммов и т. д. В дальнейшем показывается сокращённая запись слова «килограмм» — *кг* (без точки).

Знакомство с граммом даётся в том же плане, причём оно приурочено к изучению нумерации в пределе 1 000 и служит конкретизацией этого числа: в килограмме 1 000 граммов. Кроме гирьки в 1 грамм ученикам показываются и другие гири из разновеса: 25 *г*, 50 *г*, 100 *г*, 200 *г*, 500 *г*. Практика взвешивания продолжается и во II классе, с использованием граммовых и килограммовых гирь. Процесс взвешивания не так прост, как это может показаться с первого взгляда, и надо проделать значительное количество упражнений, чтобы достигнуть некоторой быстроты в набирании разновесов и в установлении равновесия.

З н а к о м с т в о с л и т р о м как единицей измерения ёмкости даётся также наглядно: а) ученикам показываются кружки — литровая и полулитровая, бутылки — литровая и полулитровая; б) производится измерение литром ёмкости различных сосудов — стеклянных банок, кувшинов и ведра; устанавливается, что в ведре 12 литров; в) сравнивается ёмкость стакана и литра; наполняя литр стаканом, учащиеся непосредственно убеждаются, что в литре 4 стакана (стаканы подбираются вместимостью в 250 *куб. см*, или в четверть литра).

Получаемые при отмеривании литром числа записываются сначала полной записью, потом сокращённой, например: 3 литра — 3 *л*, 6 литров — 6 *л*.

З н а к о м с т в о с м о н е т а м и. Многие учащиеся знакомы с монетами из опыта своей внешкольной жизни; однако полагаться всецело на этот опыт нельзя. Нужно учащимся монеты показать для непосредственного обозрения их, приурочивая этот показ к соответствующим числам, т. е. при изучении первого десятка показать монеты в 1, 2, 3, 5 и 10 коп., при изучении второго десятка — монеты в 15 и 20 коп., при изучении 100 — казначейский билет 1 рубль. Для лучшего знакомства с монетами надо широко использовать модели монет, изготовляемые самими учащимися и используемые в качестве дидактического материала. Способ изготовления моделей очень простой: под чистый кусок бумаги подкладывается монета, затем карандашом бумага затушёвывается и вырезается. На этих монетах производится изучение состава чисел сначала в пределе первого десятка, а потом и второго десятка.

З н а к о м с т в о с м е р а м и в р е м е н и. Представление о времени является более отвлечённым по сравнению с представле-

ниями длины, веса, ёмкости, и единицы измерения времени более отвлечённы по сравнению с единицами измерения других величин. Вырабатываются и развиваются эти представления медленно. Тем не менее программа первых двух классов содержит в себе много материала по измерению времени: год, месяц, сутки, час, минута. Год определяется здесь просто как совокупность 12 месяцев, месяц — как 30 или 31 сутки, сутки — как 24 часа. Большое внимание уделяется часу как единице измерения времени. О длительности часа дети получают представление по распорядку учебного дня: урок и 15-минутная перемена составляют ровно час, урок и обычная перемена в 10 минут равны приблизительно часу (точно 55 минут). Здесь дети учатся узнавать время по часам. Для этого на доске перед классом вывешивается модель часов; небольшие модели должны быть на руках у учащихся. Подробно рассматривается в I классе движение часовой стрелки. Во II классе так же подробно изучается движение минутной стрелки. Меняя положение часовой и минутной стрелки, учитель предлагает детям называть время, которое они показывают. Затем проделывается обратное упражнение: учитель предлагает детям показывать на часах, как стоят стрелки в 12 час. ночи (дня), в 8 час. вечера (утра), в 4 часа дня и т. д. Во II классе предлагается показать положение стрелок в 6 ч. 30 м., в 2 ч. 15 м., в 11 ч. 45 м. и т. д.

Представление о длительности минуты даётся более конкретно путём непосредственного восприятия этого промежутка времени; ученикам даётся определённое задание на минуту: минута молчания, минута для решения примера и т. д.

Закрепляются эти знания и представления на решении соответствующих задач.

ТАБЛИЦЫ МЕР. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕР.

(III класс.)

В младших классах из общей системы мер брались для изучения только некоторые меры, имеющие наибольшее практическое значение и находящиеся в соответствии с изучаемой нумерацией. В III и IV классах надо дать меры в их *системе*, подчеркнуть простоту и стройность метрической системы мер, в которой 10 мер низшего наименования неизменно составляют одну меру высшего наименования. Единичное отношение двух смежных мер в полной метрической таблице всегда 10. Правда, некоторые звенья из метрической системы у нас опускаются, например, гектометр, гектограмм, и детям приходится иметь дело в качестве единичных отношений не только с 10, но и с 100, 1 000. Во всяком случае это единичное отношение — всегда единица с нулями.

Система мер находит своё наглядное выражение в *таблицах* мер. С учащимися надо *составить* таблицы, записать их в тетрадях учащихся и предложить им усвоить эти таблицы. При

составлении таблиц надо исходить из основной меры: в мерах длины — из метра, в мерах веса — из грамма; в мерах ёмкости — из литра, и затем, пользуясь словами: кило, гекто, дека, деци, санти, милли, получать производные меры — большие и меньшие основной. Значение этих слов нужно объяснить:

дека — 10,	деци — десятая часть,
гекто — 100,	санти — сотая часть,
кило — 1000,	милли — тысячная часть.

Таблицы мер:

Меры длины

1 метр (*м*)	=	10 дециметрам (*дм*)
1 дециметр (*дм*)	=	10 сантиметрам (*см*)
1 сантиметр (*см*)	=	10 миллиметрам (*мм*)
1 метр (*м*)	=	100 (*см*), или 1000 (*мм*)
10 метров (*м*)	=	1 декаметру (*дкм*)
100 метров (*м*)	=	1 гектометру (*гм*)
1000 метров (*м*)	=	1 километру (*км*)

Меры веса

1 грамм (*г*)	=	10 дециграммам (*дг*)
1 дециграмм (*дг*)	=	10 сантиграммам (*сг*)
1 сантиграмм (*сг*)	=	10 миллиграммам (*мг*)
10 граммов (*г*)	=	1 декаграмму (*дкг*)
100 граммов (*г*)	=	1 гектограмму (*гг*)
1000 граммов (*г*)	=	1 килограмму (*кг*)
100 килограммов (*кг*)	=	1 центнеру (*ц*)
1000 килограммов (*кг*)	=	1 тонне (*т*)
10 центнеров (*ц*)	=	1 тонне (*т*)

Меры жидкостей:

1 литр (*л*)	=	10 децилитрам (*дл*)
1 децилитр (*дл*)	=	10 сантилитрам (*сл*)
1 сантилитр (*сл*)	=	10 миллилитрам (*мл*)
10 литров (*л*)	=	1 декалитру (*дкл*)
100 литров (*л*)	=	1 гектолитру (*гл*)
1000 литров (*л*)	=	1 килолитру (*кл*)

В таблице названия мер записаны полностью и сокращённо; обычно эти меры пишутся сокращённо (*м*, *см*, *кг*, *г* и др.). Сокращённые названия метрических мер пишутся без точки.

В III классе нужно ограничиться сокращёнными таблицами так, как они даны в программе. Из мер длины указать: километр, метр, дециметр, сантиметр, миллиметр. Из мер веса — тонну, центнер, килограмм, грамм. Из мер ёмкости — литр.

При составлении таблицы мер нужно остановиться на названиях тех мер, которые даются ученикам впервые, и дать о них, насколько это возможно, наглядное представление. Из мер длины такой мерой является дециметр. Он показывается на демонстрационном метре; ученики чертят отрезок в 1 *дм*; отрезают полоски бумаги длиной в 1 *дм*, сравнивают его с другими мерами — с метром и сантиметром, откладывают дециметр на ладони своей руки, измеряют им длину и ширину стола, парты, книг, тетрадей.

Центнер: мешок сахарного песку весит приблизительно центнер; два мешка картофеля весят центнер. Взрослый сильный че-

ловек может пронести на себе тяжесть весом около 1 центнера на небольшом расстоянии. Тонна: пара лошадей может везти груз весом около тонны; на грузовые машины можно грузить $1^1/_2$ *т* (полуторатонка), 5 *т* (пятитонка). В вагон можно погрузить 16 тонн пшеницы, песку, угля (есть большие вагоны, вмещающие до 50 *т*). Такие сравнения помогут ученикам составить себе некоторое представление о том весе, который обозначается словами «тонна», «центнер». Основным в создании таких представлений будут, конечно, единичные отношения между мерами высшего и низшего наименования: центнер — это 100 *кг*, тонна — это 1 000 *кг*, или 10 *ц*.

Понятие о простом и составном именованном числе. Именованные числа получаются в результате измерения.

На конкретных измерениях нужно показать ученикам, как образуются простые и составные именованные числа, чтобы учащиеся ясно представляли себе происхождение этих чисел. Измерим длину куска проволоки или шпагата (учитель заранее заготовляет такой кусок шпагата, длина которого выражается целым числом метров). Допустим, что получилось 3 *м*. Записываем это число. Теперь измерим длину парты. В ней метр уложился один раз и осталась часть, в которой целый метр не укладывается. Тогда берём меньшую меру — дециметр. Допустим, что дециметр уложился ровно 5 раз. Значит, длина парты составляет 1 *м* 5 *дм*. Запишем и это число.

Производим ещё несколько таких измерений и получаем несколько простых и несколько составных именованных чисел. Если есть подходящие условия, то желательно получить несколько простых и составных именованных чисел в результате взвешивания. Что цены могут выражаться простым и составным именованным числом — это детям хорошо известно из их жизненного опыта. Получится табличка:

3 *м*, 5 *м*, 2 *кг*, 12 руб.,	1 *м* 7 *дм*, 5 *м* 80 *см*,
250 *г*, 8 *дм*, 16 *см*	2 *кг* 200 *г*, 6 руб. 40 коп.

Числа слева получились при измерении величин одной мерой и имеют при себе названия одной меры.

Числа справа получились при измерении величин двумя мерами и имеют при себе названия двух мер.

Даём определения: «Число, составленное из единиц одного наименования, называется простым именованным числом. Число, составленное из однородных единиц нескольких наименований, называется составным именованным числом».

Надписываем наши таблички сверху: слева «простые именованные числа», справа «составные именованные числа».

Тут же даём определение отвлечённого числа. «Если при числе нет наименования его единиц, то оно называется отвлечённым числом».

1, 2, 6, 10, 20 и т. д. — отвлечённые числа.
1 *м*, 5 руб. 20 коп., 5 *ц* 75 *кг* — именованные числа.

Раздробление именованных чисел.

Учитель показывает, что длина (или ширина) какого-либо предмета может быть выражена различными, но равными между собой именованными числами. Отметим на демонстрационном метре полметра. «Сколько в этой части метра дециметров?» (5 дециметров.) «А сколько здесь сантиметров?» (50 *см.*) «Чему же равна длина полуметра?» (Пяти дециметрам, или 50 санти метрам.) Так как длина одна и та же, то можно записать: 5 *дм*=50 *см*. Мы сначала измерили длину полуметра дециметрами, а потом — сантиметрами. В этом примере мы раздробили дециметры в сантиметры.

Измерим длину парты. Допустим что по её длине уложился один раз метр и шесть раз дециметр. Следовательно, длина парты 1 *м* 6 *дм*. Вычислим длину парты в дециметрах, получится 16 дециметров. Так как длина парты одна и та же, то можно сказать, что 1 *м* 6 *дм* равны 16 *дм*. Здесь мы крупную меру — метр — заменили более мелкими мерами — дециметрами. В таком случае говорят, что метр раздробили в дециметры.

Книга стоит 1 руб. 50 коп. Как можно по-иному сказать, сколько стоит книга? (150 копеек.) Значит 1 руб. 50 коп. всё равно, что 150 коп. Здесь рубль раздробили в более мелкие меры — в копейки.

Что же значит раздробить именованное число? Это значит выразить его в более мелких мерах.

Раздробим 2 руб. 56 коп. Нам надо рубли заменить копейками. В одном рубле 100 коп., в двух рублях 200 коп.; 200 коп., да ещё 56 коп., всего будет 256 коп. Запишем это так: 2 руб. 56 коп.= =256 коп.

«Раздробите 5 *кг* 250 *г* в граммы». Ученики рассуждают так: «В одном килограмме 1 000 *г*, в 5 *кг* — 5 000 *г* да ещё 250 *г*, а всего получится 5 250 *г*. Запишем это: 5 *кг* 250 *г* = 5 250 *г*».

Раздробление всякого метрического именованного числа производится устно; записывается только результат в строчку, в виде равенства.

Познакомив учащихся с раздроблением, нужно на нескольких последующих уроках 5—7 минут в начале урока посвящать устным упражнениям в раздроблении, чтобы добиться не только правильности, но и известной быстроты в преобразовании именованных чисел. Примеры нужно давать в порядке постепенно возрастающей трудности: сначала такие меры, в которых единичное отношение 10 (раздробить 5 *м* 4 *дм*, 8 *дм* 6 *см*, 4 *см* 8 *мм*), потом даются меры с единичным отношением 100 (раздробить 6 *м* 80 *см* в сантиметры, 2 *ц* 10 *кг* в килограммы), наконец даются меры с единичным отношением 1 000 (раздробить 6 *т* 150 *кг* в килограммы, 12 *км* 800 *м* — в метры).

В упражнении нужно предусмотреть случаи появления нулей; например: 2 *м* 8 *см* = 208 *см*; 8 *ц* 6 *кг* = 806 *кг* и др.

Превращение именованных чисел.

На демонстрационном метре учитель отмечает длину в 60 *см*. «Выразим эту же длину в дециметрах; 10 *см* составляют 1 *дм*, а 60 *см* составят столько дециметров, сколько раз 10 *см* содержится в 60 *см*. Делим 60 *см* по 10 *см*, получаем 6. Следовательно, 60 *см* = 6 *дм*. Одну и ту же длину мы обозначили двумя числами — 60 *см* и 6 *дм*. Эти именованные числа равны между собой, так как они обозначают одну и ту же длину:

60 *см* = 6 *дм*

Здесь 60 *см* мы заменили более крупными мерами — 6 дециметрами».

За книгу уплатили 300 копеек. Как можно иначе сказать про цену книги? Книга стоит 3 рубля. Цена одна и та же, но выражена она различными числами: в копейках — 300 копеек, в рублях — 3 рубля. Эти именованные числа равны между собой. Запишем это так: 300 коп. = 3 руб.

Мелкие меры — копейки — превращены в крупные меры — рубли.

Измерим высоту шкафа сантиметрами. Допустим, что получилось 180 *см*. Заменим эти меры более крупными: 100 *см* составляют 1 *м* и остаётся ещё 80 *см*. Получится всего 1 *м* 80 *см*; 180 *см* равняются 1 *м* 80 *см*. Запишем это: 180 *см* = 1 *м* 80 *см*.

Получается на классной доске такая табличка:

60 *см* = 6 *дм*
300 коп. = 3 руб.
180 *см* = 1 *м* 80 *см*

На левой стороне мелкие меры — сантиметры, копейки; на правой более крупные — дециметры, рубли, метры. Мелкие меры заменены более крупными мерами. Такая замена называется превращением именованного числа.

Что же значит превратить именованное число? Превратить именованное число — значит выразить его в более крупных мерах.

Превращение метрических именованных чисел выполняется всегда устно; записываются только данное число и результат его превращения. Превратим, например, 25 800 *кг* в тонны. Рассуждаем так: 1 000 *кг* составляет тонну. В данном числе 25 тысяч *кг*. Они составят 25 *т* и останется ещё 800 *кг*. Значит, 25 800 *кг* = = 25 *т* 800 *кг*. Упражнения располагаются в порядке постепенно возрастающей трудности: сначала предлагаются для превращения меры о единичным отношением 10 (85 *ц* превратить в тонны), потом — меры с единичным отношением 100 (750 *кг* превратить в центнеры), наконец — меры с единичным отношением 1 000 (45 600 *м* превратить в километры). Предлагаемые примеры усложняются и по другой линии: сначала даются такие примеры, в которых в результате превращения полу-

чается простое именованное число (например: 80 *см* = = 8 *дм*, 700 коп. = 7 руб., 5 000 *г* = 5 *кг* и т. д.); потом — такие примеры, где после превращения получается составное именованное число (например: 64 *дм* = 6 *м* 4 *дм*; 485 коп. = 4 руб. 85 коп.; 8 200 *кг* = 8 *т* 200 *кг* и т. д.) В упражнении нужно предусмотреть случаи с нулями: 6 005 коп. = 60 руб. 05 коп.; 102 *см* = 1 *м* 2 *см*.

После изучения каждого преобразования в отдельности (раздробления и превращения) необходимо сопоставить их, сравнить между собой и возможно ярче подчеркнуть, что эти преобразования противоположны друг другу: в раздроблении крупные меры заменяются мелкими, дробными мерами, в превращении же, наоборот, мелкие меры заменяются крупными; первое преобразование выполняется посредством умножения, второе — посредством деления.

ДЕЙСТВИЯ НАД СОСТАВНЫМИ ИМЕНОВАННЫМИ ЧИСЛАМИ.

(IV класс.)

Действия над составными именованными числами, являясь своеобразными задачами, требуют от ученика при выполнении их более сложных рассуждений, чем действия над отвлечёнными числами. Прежде чем приступить к вычислению, ученик должен: а) внимательно посмотреть на данные числа и заметить имеющиеся в них особенности; б) правильно подписать одно число под другим в соответствии с характером данных чисел; в) в случае необходимости произвести раздробление.

Сложение.

Объяснение этого действия нужно начать с примеров, доступных для устных вычислений, и на этих примерах надо показать, что сложение составных именованных чисел заключается в последовательном складывании единиц каждого наименования отдельно. Примеры для объяснения расположим в таком порядке:

1) 5 *м* + 8 *м* = 13 *м*; 80 *кг* + 25 *кг* = 105 *кг* = 1 *ц* 5 *кг*.	Простое им. число складывается с простым как отвлечённые числа.
2) 8 *кг* + 200 *г* = 8 *кг* 200 *г*; 12 *км* + 450 *м* = 12 *км* 450 *м*.	Складываются простые им. числа с разными наименованиями: в сумме получается составное им. число
3) 5 руб. 30 коп. + 40 коп. = 5 руб. 70 коп. 5 *т* 200 *кг* + 3 *т* = 8 *т* 200 *кг*; 4 *м* 75 *см* + 50 *см* = 4 *м* 125 *см* = = 5 *м* 25 *см*.	Составное им. число складывается с простым.
4) 4 *м* 25 *см* + 3 *м* 40 *см* = 7 *м* 65 *см*; 5 *кг* 600 *г* + 3 *кг* 700 *г* = = 8 *кг* 1300 *г* = 9 *кг* 300 *г*.	Оба слагаемых — составные именованные числа; первый пример без превращения; второй — с превращением.

На решении этих устных примеров учащиеся научаются понимать, что при сложении составных именованных чисел скла-

дываются меры одинакового наименования: метры с метрами и сантиметры с сантиметрами; килограммы с килограммами и граммы с граммами; рубли с рублями и копейки с копейками и т. д. А этого вполне достаточно, чтобы перейти к письменному сложению, которое строится на том же принципе, но записывается «столбиком».

Упражнения в письменном сложении с объяснениями ведутся примерно в такой последовательности:

1) $$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 15 \text{ м } 27 \text{ см} \\ 26 \text{ » } 62 \text{ »} \end{array} \\ \hline 41 \text{ м } 89 \text{ см} \end{array}$$ Сложение составных именованных чисел без превращения суммы.

2) $$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 22 \text{ руб. } 68 \text{ коп.} \\ 64 \text{ » } 96 \text{ »} \end{array} \\ \hline 87 \text{ руб. } 64 \text{ коп.} \end{array}$$ Сложение составных именованных чисел с превращением суммы.

3) $$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 3 \text{ т } 658 \text{ кг} \\ 750 \text{ »} \end{array} \\ \hline 4 \text{ т } 408 \text{ кг} \end{array}$$ Сложение составного именованного числа и простого с превращением.

4) $$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 2 \text{ км } 85 \text{ м} \\ 6 \text{ » } 73 \text{ »} \end{array} \\ \hline 8 \text{ км } 158 \text{ м} \end{array}$$ Сложение составных именованных чисел, в которых отсутствует разряд сотен.

Для показа, как ученик рассуждает, сложим 22 руб. 68 коп. и 64 руб. 96 коп. Подпишем эти числа одно под другим так, чтобы рубли находились под рублями, а копейки под копейками. Под вторым слагаемым проведем черту, слева поставим знак сложения и начнём сложение с мер низшего наименования — с копеек. Сложим сначала 68 коп. и 96 коп., а затем 22 руб. и 64 руб.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 22 \text{ руб. } 68 \text{ коп.} \\ 64 \text{ » } 96 \text{ »} \end{array} \\ \hline 87 \text{ руб. } 64 \text{ коп.} \end{array}$$

8 да 6 — 14. 4 пишем, 1 — в уме; 1 да 6—7, да 9—16 десятков; 6 десятков пишем, а одна сотня копеек составит один рубль; прибавим его к рублям: 1 рубль да 2—3 рубля, да 4—7 руб.; 2 да 6—8. Всего получилось 87 руб. 64 коп.

В четвертом примере для предупреждения ошибок можно приучить учеников к предварительному раздроблению слагаемых:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 2085 \text{ м} \\ 6073 \text{ »} \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Вычитание.

Чтобы научить учеников безошибочно производить вычитание составных именованных чисел, нужно хорошо объяснить им следующие основные случаи:

1) Случай, когда при вычитании не приходится прибегать к заниманию меры высшего наименования, например:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 5 \text{ кг } 825 \text{ г} \\ 2 \text{ » } 485 \text{ »} \end{array} \\ \hline 3 \text{ кг } 340 \text{ г} \end{array}$$

2) Более трудный случай, когда приходится занимать одну единицу из мер высшего наименования и раздроблять её в меры низшего наименования. На этом случае надо остановиться и объяснить его тщательно на нескольких примерах. Пусть дано вычесть 3 *км* 750 *м* из 8 *км* 285 *м*.

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{rl} 8 \text{ км} & 285 \text{ м} \\ 3 \text{ »} & 750 \text{ »} \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Посмотрев внимательно на количество километров и метров в уменьшаемом и вычитаемом, легко заметить, что от 285 *м* отнять 750 *м* нельзя. В этом случае нужно занять 1 *км*, раздробить его в метры и, получив 1000 *м*, прибавить их к 285, получится 1 285 *м*. На месте же километров в уменьшаемом останется только 7 *км*. Таким образом, уменьшаемое 8 *км* 285 *м* преобразуется в другое число, ему равное,— 7 *км* 1 285 *м*. Перепишем данный пример в таком виде:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{rr} 7 \text{ км} & 1\,285 \text{ м} \\ 3 \text{ »} & 750 \text{ »} \end{array} \\ \hline \begin{array}{rr} 4 \text{ км} & 535 \text{ м} \end{array} \end{array}$$

(Ученики во время объяснения только смотрят и слушают, ничего не записывая в свои тетради).

Вычитая последовательно метры из метров и километры из километров, получим в остатке 4 *км* 535 *м*.

Решив ещё один аналогичный пример с такой же двойной записью

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{rr} 28 \text{ руб.} & 56 \text{ коп.} \\ 13 \text{ »} & 84 \text{ »} \end{array} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\begin{array}{rr} 27 \text{ руб.} & 156 \text{ коп.} \\ 13 \text{ »} & 84 \text{ »} \end{array} \\ \hline \begin{array}{rr} 14 \text{ руб.} & 72 \text{ коп.} \end{array} \end{array}$$

учитель ставит вопрос, нельзя ли решать такие примеры с р а з у, н е п е р е п и с ы в а я и х. Решаем первый пример, рассуждая так:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{rl} 8 \text{ км} & 285 \text{ м} \\ 3 \text{ »} & 750 \text{ »} \end{array} \\ \hline \begin{array}{rl} 4 \text{ км} & 535 \text{ м} \end{array} \end{array}$$

От 5 отнять 0, получится 5. От 8 отнять 5, получится 3. От 2 отнять 7 нельзя. Занимаем 1 *км* — 1 000 *м*, раздробляем тысячу в сотни, получим 10 сотен, да 2 сотни — 12 сотен. Отнимаем 7 от 12, получаем 5. От 7 *км* отнять 3 *км*, останется 4 *км*. Всего получилось в остатке 4 *км* 535 *м*.

Решим таким способом и второй пример. Сравнив первые и вторые записи, приходим к выводу, что решать примеры нужно сразу, не переписывая их. Учащиеся заносят в свои тетради только последнюю, окончательную запись и всегда пользуются ею в аналогичных случаях.

3) Некоторую особенность представляет тот случай вычитания, когда уменьшаемое — простое, а вычитаемое — составное именованное число, например: 6 *т* — 2 *т* 485 *кг* =

Выясняем особенности этого примера: в уменьшаемом только тонны; в вычитаемом даны и тонны, и килограммы. Раздробим уменьшаемое и вычитаемое в меры одинакового наименования — в килограммы и вычтем 2485 *кг* из 6000 *кг*.

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 6000 \text{ кг} \\ 2485 \text{ »} \end{array} \\ \hline 3515 \text{ кг} \end{array}$$

Остаток 3515 *кг* превращаем в тонны и результат записываем в строчку.

4) Наибольшие трудности представляет для учащихся решение таких примеров, в которых в умень-

шаемом отсутствуют некоторые разряды, например: 15 *км* 50 *м* — 3 *км* 80 *м*; 8 *кг* 75 *г* — 2 *кг* 96 *г*; 16 руб. 4 коп. — 10 руб. 6 коп. Здесь в первых двух примерах отсутствует разряд сотен; в третьем примере нет разряда десятков. Для того чтобы в решении таких примеров предупредить ошибки, нужно соблюдать два условия:

а) проанализировать примеры до их решения и заметить особенности данных составных именованных чисел (пропуск разряда); б) заметив пропуск разряда, нужно при записи примера в столбик или поставить на месте отсутствующего разряда 0, или же уменьшаемое и вычитаемое при переписывании примера раздробить в меры низшего наименования и вычитать как отвлечённые числа; в полученном же остатке произвести устно превращение. Покажем несколько образцов решения таких примеров:

1) 15 *км* 56 *м* — 3 *км* 83 *м* = 11 *км* 973 *м*
2) 16 руб. 4 коп. — 10 руб. 6 коп. = 5 руб. 98 коп.

$$\begin{array}{r} -\,15\,056\text{ м} \\ 3\,083\text{ »} \\ \hline 11\,973\text{ м} \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} -\,15\text{ км }056\text{ м} \\ 3\text{ » }083\text{ »} \\ \hline 11\text{ км }973\text{ м} \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} 1056\phantom{\text{ м}} \\ -\,15\text{ км }56\text{ м} \\ 3\text{ » }83\text{ »} \\ \hline 11\text{ км }973\text{ м} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\,1604\text{ коп.} \\ 1006\text{ »} \\ \hline 598\text{ коп.} \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} -\,16\text{ руб. }04\text{ коп.} \\ 10\text{ » }06\text{ »} \\ \hline 5\text{ руб. }98\text{ коп.} \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} 104\phantom{\text{ коп.}} \\ -\,16\text{ руб. }4\text{ коп.} \\ 10\text{ » }6\text{ »} \\ \hline 5\text{ руб. }98\text{ коп.} \end{array}$$

Без предварительного раздробления или без восстановления на месте недостающего разряда нуля такие примеры решать трудно. Третья форма записи правильна, но не изящна и не удобна для вычислений.

Умножение.

При письменном умножении составных именованных чисел надо различать два основных случая: 1) умножение на однозначное число и 2) умножение на многозначное число. В первом случае умножаются единицы каждого наименования последовательно, начиная с мер низшего наименования. Во втором случае, прежде чем умножать, множимое о б я з а т е л ь н о р а з д р о б л я е т с я в меры низшего наименования; умножение производится так же, как умножение отвлечённых чисел; в полученном произведении, если нужно, производится превращение. Приведём несколько образцов решения примеров и их пояснений.

1) $$\begin{array}{r} \times\,4\text{ м }85\text{ см} \\ 6\phantom{\text{ см}} \\ \hline 29\text{ м }10\text{ см} \end{array}$$

Решим задачу: «На одно платье требуется 4 *м* 85 *см* материи. Сколько материи нужно на 6 таких платьев?» Для решения задачи нужно 4 *м* 85 *см* умножить на 6. Умножаем 4 *м* 85 *см* на 6, записывая вычисление столбиком. Начинаем умножение с мер низшего наименования — с сантиметров: шестью пять — 30; 0 пишем, 3 — в уме; шестью восемь — 48, да 3 — 51; 1 пишем, а 5 сотен, составляющих 5 *м*, прибавим к метрам; шестью четыре — 24, да 5 — 29 *м*. Всего в произведении получилось 29 *м* 10 *см*. Следовательно, на 6 платьев требуется 29 *м* 10 *см* материи.

2) Умножим 28 руб. 72 коп. на 24.

Чтобы было удобнее умножать, раздробим предварительно 28 руб. 72 коп.

в копейки, получим 2 872 коп. Теперь умножаем 2 872 коп. на 24, получаем 68 928 коп., или 689 руб. 28 коп.

3) Допустим, что нам нужно умножить 16 *км* 80 *м* на 26. Для этого раздробим предварительно 16 *км* 80 *м* в метры; получится 16 080 *м*. Теперь умножим 16 080 *м* на 26, записав это умножение столбиком.

Получив в произведении 418 080 *м*, устно превращаем их в километры и получаем 418 *км* 80 *м*.

На страничке тетради запись решения двух указанных примеров будет иметь следующую форму:

1) 28 руб. 72 коп. × 24 = 689 руб. 28 коп.

```
   2 872 коп.
 ×    24
 ----------
  11 488
  57 44
 ----------
  68 928 коп.
```

2) 16 *км* 80 *м* × 26 = 418 *км* 80 *м*

```
   16080 м
 ×    26
 ----------
    9648
   3216
 ----------
  418080 м
```

При решении примеров последнего вида надо следить за тем, чтобы ученики производили правильно раздробление.

Решив на умножение несколько примеров, делаем вывод:

«Чтобы умножить составное именованное число на отвлечённое, нужно: а) раздробить составное именованное число; б) вычисление производить отдельно от записи действия; в) простое именованное число, полученное в произведении, превратить в меры высшего наименования».

Изучая письменное умножение, нужно в то же время упражнять учеников в устном умножении.

Деление.

В делении нужно различать два вида: деление на равные части и деление по содержанию, производимые разными способами.

1. **При делении на равные части делитель — число отвлечённое, частное — число именованное.** При делении именованного числа на равные части иногда приходится перед делением всё делимое раздроблять, например:

```
8 м 64 см | 12
----------|------
864 см    | 72 см
 84
---
 24
 24
---
  0
```

Деля 8 *м* 64 *см* на 12, нужно предварительно 8 *м* 64 *см* раздробить в сантиметры и делить 864 *см* на 12.

Но во многих случаях предварительное раздробление не вызывается необходимостью, например:

```
80 км 704 м | 32
64          |---------
---         | 2 км 522 м
16 км
--------
16704 м
160
---
  70
  64
  --
  64
  64
  --
   0
```

Здесь только в середине процесса деления потребовалось раздробление (раздробление остатка 16 *км* в метры). Получив в остатке 16 *км*, надо поставить вопрос: «Что надо сделать, чтобы дальше можно было продолжать деление?» Очевидно, для этого надо 16 *км* раздробить в метры и прибавить к ним данные в делимом 704 *м*.

2. **При делении по содержанию делимое и делитель — числа именованные.** Здесь возможны различные случаи, а именно: а) делимое и делитель — числа п р о с т ы е именованные (36 руб. : 75 коп.); б) делимое — с о с т а в н о е именованное число, а делитель — п р о с т о е именованное число (8 *т* 100 *кг* : 9 *ц*); в) делимое — п р о с т о е именованное число, а делитель — с о с т а в н о е именованное число (132 *м* : 2 *м* 75 *см*) и, наконец, г) делимое и делитель — оба составные именованные числа (51 *кг* 450 *г* : 3 *кг* 400 *г*). Но при всём разнообразии примеров способ деления остаётся одним и тем же: п р и д е л е н и и о б а ч и с л а п р е д в а р и т е л ь н о р а з д р о б л я ю т с я в о д и н а к о в ы е м е р ы. В ч а с т н о м п р и э т о м в с е г д а п о л у ч а е т с я ч и с л о о т в л е ч ё н н о е, п о к а з ы в а ю щ е е, с к о л ь к о р а з о д н о и м е н о в а н н о е ч и с л о с о д е р ж и т с я в д р у г о м. Чтобы смысл такого деления был для учащихся понятен, примеры нужно почаще облекать в форму задач, например:

«Сколько метров тесёмки можно купить на 36 руб., если один метр стоит 75 коп.?» Ученик должен ответить: «Столько метров, сколько раз 75 коп. содержится в 36 руб. Чтобы это узнать, нужно 36 руб. разделить по 75 коп. Для этого мы 36 руб. раздробим в копейки, получится 3 600 коп., которые и будем делить по 75 коп.».

Записывается деление так: 36 руб : 75 коп. = 48 (*м*)

```
3600 к. |75 к.
300     |----
----      48
 600
 600
----
   0
```

Закончив деление, полезно спросить: «Что показывает частное 48?» «Оно показывает,— отвечает ученик,— что 75 коп. содержится в 36 руб. 48 раз».

«Сколько же метров тесёмки можно купить на 36 руб.?» (48 *м*.) Слово «метров» можно поставить в качестве наименования при 48, заключив букву *м* в скобки: 48 (*м*).

Решим ещё один пример, взяв его из задачи: «На пошивку шёлковых платьев израсходовали 29 *м* 75 *см* шёлка. На каждое платье пошло по 4 *м* 25 *см*. Сколько вышло платьев?» Для решения этой задачи нужно узнать, сколько раз 4 *м* 25 *см* повторится в 29 *м* 75 *см* (столько будет платьев). Для этого разделим 29 *м* 75 *см* по 4 *м* 25 *см*. Раздробим оба числа в сантиметры. Решение запишем так:

29 *м* 75 *см* : 4 *м* 25 *см* = 7 (платьев)

```
2975 см |425 см
2975    |------
----       7
   0
```

МЕРЫ ВРЕМЕНИ.

(III и IV к л а с с ы.)

В III классе даётся знакомство с двумя новыми для учащихся мерами времени — с секундой и веком, или столетием. Представление о длительности промежутка времени, измеряемого секундой, даётся конкретно: если вести счёт в довольно быстром темпе

(один, два, три, четыре, пять), то это и будет отсчитывание секунд. Век — это 100 лет.

Дети должны знать, что теперь XX век, что ему предшествовал XIX век. XX веков это 2 000 лет. XIX веков это 1 900 лет. Дети должны знать, который теперь год. Дальнейшие уточнения и конкретизация мер времени получатся путём решения задач. Решая задачи с целыми годами, ученики уточняют своё представление о столетии и годе; решая задачи в пределе года, они закрепляют свои знания о месяце и сутках; наконец, на задачах в пределе суток ученики повторяют такие меры, как час, минута. Ученики должны твёрдо знать таблицу мер времени со всеми единичными отношениями мер высшего и низшего наименования.

Век, столетие = 100 годам.

Год = 12 месяцам = 365 или 366 дням.

Месяц = 30 или 31 дню (в феврале 28 или 29 дней).

Сутки = 24 часам.

Час = 60 минутам.

Минута = 60 секундам.

Изучение мер не должно быть формальным, его надо соединить с воспитательной работой: научить детей не только измерять, но беречь, ценить время, с пользой проводить его, правильно распределять время на труд, отдых и развлечения. В этих целях нужно научить детей пользоваться часами, узнавать по часам время с точностью до минуты. Нужно иметь в классе отрывной календарь и табель-календарь (последний нетрудно сделать самим учащимся) и научить детей пользоваться этим календарём: узнавать, какое число приходится на данный день и, наоборот, какой день недели приходится на данное число. Надо проследить за тем, чтобы календарь вошёл в быт ученика. Чтобы положить начало созданию привычки ценить время, можно, изучая меры времени, давать задания учащимся III и IV классов в течение определённого срока (одной-двух недель) вести дома записи с учётом того, сколько времени они расходуют на приготовление уроков, на игры и отдых, на сон и т. д.

Так школа может создать у ученика одну из ценнейших привычек, которая должна быть у каждого культурного человека.

Раздробление и превращение мер времени.

Понятие о раздроблении и превращении как преобразованиях именованного числа учащиеся уже имеют (см. стр. 333—335), и здесь нужно только ещё раз повторить, что значит раздробить (превратить) именованное число. Метрические меры раздробляются и превращаются всегда устно, с записью только данных и результата. Меры же времени преобразуются устно только в лёгких случаях, во всех остальных случаях пользуются письменным раздроблением и превращением. Примеры на раздробление решаются в такой последовательности:

а) раздробление *простых* именованных чисел: суток — в часы; часов — в минуты; минут — в секунды. Например, раздробить: 7 суток в часы; 15 час. в минуты; 12 мин. в секунды; б) раздробление *составных* именованных чисел: суток и часов в часы; часов и минут в минуты; минут и секунд в секунды. Например: 15 сут. 18 час.— в часы; 12 час. 45 мин.— в минуты; 6 мин. 50 сек.— в секунды.

Брать примеры, состоящие более чем из двух наименований, не следует: в практике такие случаи встречаются редко.

Раздробление, как известно, производится путём умножения; при умножении единичных отношений можно широко пользоваться переместительным свойством, меняя места сомножителей там, где это приводит к упрощению вычислений, т. е. в тех случаях, когда приходится умножать 60 (единичное отношение часа и минуты, минуты и секунды) на двузначное или трёхзначное число. А чтобы избежать при этом затруднений с постановкой наименований, последние можно не писать вовсе или ставить наименование только у результата, заключая его в скобки. Пользуясь при раздроблении и превращении в основном письменными вычислениями, нужно в то же время действия над небольшими числами, удобными для устного счёта, производить *устно*: это экономит и время, и бумагу и, кроме того, тренирует учащихся в устном счёте. Меняя места сомножителей, ученик должен уметь объяснить, почему он так поступает.

Приведём примеры раздробления и превращения.

1. 18 час. 35 мин. 56 сек. *раздробить* в секунды.

При первом объяснении и следующем за ним упражнении, когда ударение делается на сознательность выполнения производимых операций, вычисления можно производить так:

18 час. 35 мин. 56 сек. = 66 956 сек.

$$\begin{array}{r} \times\; 60 \text{ мин.} \\ 18 \\ \hline 1080 \text{ мин.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\; 1080 \text{ мин.} \\ 35\ \text{»} \\ \hline 1115 \text{ мин.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\; 60 \text{ сек.} \\ 1115 \\ \hline 66\,900 \text{ сек.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\; 66\,900 \text{ сек.} \\ 56\ \text{»} \\ \hline 66\,956 \text{ сек.} \end{array}$$

В дальнейших упражнениях (тренировочных) можно записи придать более компактную форму, объяснив ученикам её условность:

$$\begin{array}{l} \times\; 18 \text{ час. } 35 \text{ мин. } 56 \text{ сек.} = 66\,956 \text{ сек.} \\ \quad 60 \\ \hline +\; 1080 \text{ (мин.)} \\ \quad 35 \\ \hline \times\; 1115 \\ \quad 60 \\ \hline +\; 66900 \text{ (сек.)} \\ \quad 56 \\ \hline \quad 66\,956 \text{ (сек.)} \end{array}$$

2. Пусть требуется превратить 863 885 сек. в высшие меры. Для этого последовательно превращаем секунды в минуты (при помощи деления на 60),

далее минуты — в часы (путём деления на 60) и, наконец, часы — в сутки (путём деления на 24):

```
863885| 60
263    |14398 (мин.)| 60
 238     239         |239 (час.)| 24
  588     598         216        |9 (сут.)
   485     58 мин.     23 час.
     5 сек.
```

Итак: 863 885 сек. = 9 сут. 23 час. 58 мин. 5 сек.

Здесь применена неразрывная запись в целях экономии места и времени. Наименования поставлены только при остатках; в скобки их можно не заключать.

Сложение и вычитание.

Здесь следует различать два случая: сложение без превращения и с превращением в сумме; вычитание без занимания и с заниманием меры высшего наименования. Учащихся нужно познакомить сначала с первым, потом со вторым случаем. Если в уменьшаемом нет таких мер, какие есть в вычитаемом, то на месте отсутствующих мер в уменьшаемом ставятся нули.

Приведём образцы записи сложения и вычитания:

```
1. а)  + 5 сут. 16 час.     б)  +  9 час. 50 мин.     в)  + 10 час. 0 мин. 45 сек.
         8  »    6  »             12  »   48  »                2  »   0  »   15  »
       ---------------          -----------------          --------------------------
        13 сут. 22 часа.         21 час. 98 мин.            12 час. 0 мин. 60 сек.
                                -----------------          --------------------------
                                 22 часа 38 мин.            12 час. 1 мин.  0 сек.

2. а)  − 8 сут. 16 час.          б)  − 35 мин. 17 сек.
         3  »   12  »                  21  »   38  »
       -----------------             -----------------
         5 сут.  4 часа.               13 мин. 39 сек.

                59    105                                59     60
в)  − 6 час. 0 мин. 45 сек.             г)  − 6 час. 0 мин. 45 сек.
      2  »   0  »   50  »        или          2  »   0  »   50  »
    -------------------------               -------------------------
    3 часа 59 мин. 55 сек.                  3 часа 59 мин. 55 сек.
```

Можно избежать зачёркивания и надписывания цифр, но для этого надо приучить учеников вычитать данное число из раздробленной меры, а потом прибавлять к полученному остатку имеющиеся в уменьшаемом меры того же наименования. Так, в примере (2б), заняв одну минуту и раздробив её в 60 секунд, ученик может от 60 отнять 38 и к остатку 22 прибавить 17, получится 39 (обоснование: чтобы от суммы отнять число, достаточно отнять это число от одного из слагаемых $(60 + 17) - 38 = (60 - 38) + 17 = 22 + 17 = 39$).

Такие же примеры, в которых уменьшаемое — простое именованное число, проще решать устно, чем письменно. Пусть например, дано вычесть 14 час. из 2 суток. Запишем этот пример в строчку и будем его решать так: возьмём 1 сутки и раздробим их в часы. Тогда в уменьшаемом будет: 1 сутки 24 часа. Вычтем 14 час. из 24 час., останется 10 час, да ещё 1 сутки, всего в остатке получится 1 сут. 10 час. Получится следующая запись:

2 сут. — 14 час. = 1 сут. 10 час.

Если же решать этот пример по правилу письменного вычитания, то вычисление может быть записано так:

$$\begin{array}{r} \phantom{2\text{ сут. }}24\phantom{\text{ час.}} \\ 2\text{ сут. } 00\text{ час.} \\ -\quad »\quad 14\quad » \\ \hline 1\text{ сут. } 10\text{ час.} \end{array}$$

Умножение.

Если при умножении именованных чисел с метрическими мерами требовалось предварительное раздробление множимого, так как раздробление упрощает вычисление, то при умножении чисел с мерами времени раздробление производить не следует, оно усложнило бы процесс умножения, так как раздробление повлекло бы за собой необходимость превращения произведения, что в свою очередь выполняется при помощи сложных приёмов. Таким образом, умножать именованное число с мерами времени нужно так, как оно дано, т. е. нужно умножать каждую меру отдельно, начиная с мер низшего наименования и делая, где это возможно, превращение.

Превращение делается или устно (в лёгких случаях), или письменно.

Решим несколько примеров на умножение в порядке их постепенного усложнения:

1) $$\begin{array}{r} \times\, 2\text{ часа } 15\text{ мин.} \\ 3 \\ \hline 6\text{ час } 45\text{ мин.} \end{array}$$

Этот пример решается без превращения в произведении. Результат получается сразу окончательный.

2) $$\begin{array}{r} \times\, 3\text{ часа } 50\text{ мин.} \\ 4 \\ \hline 12\text{ час. } 200\text{ мин.} \\ \hline 15\text{ час. } 20\text{ мин.} \end{array}$$

В этом примере требуется превращение минут в часы (200 мин. = 3 часа 20 мин.).

3) Третий случай (значительно более сложный), когда множитель — число двузначное и когда меры каждого наименования нужно умножать письменно. Решая задачу:

«На изготовление одной детали требуется 2 час. 37 мин. 45 сек. Сколько времени потребуется, чтобы изготовить 25 таких деталей?

Решение. 2 час. 37 мин. 45 сек. × 25 = 65 час. 43 мин., 45 сек.

$$\begin{array}{r} \times\, 45\text{ сек.} \\ 25 \\ \hline 225 \\ 90 \\ \hline 1125 \\ -\,60 \\ \hline 525 \\ -\,480 \\ \hline 45\text{ сек.} \end{array} \qquad 1125 : 60 = 18\text{ (мин.)}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 37\text{ мин.} \\ 25 \\ \hline 185 \\ 74 \\ \hline 925 \\ +\,18 \\ \hline 943 \\ -\,60 \\ \hline 343 \\ -\,300 \\ \hline 43\text{ мин.} \end{array} \qquad 943 : 60 = 15\text{ (час.)}$$

2 час. × 25=50 час.
50 час. + 15 час. = 65 час.

Деление.

При делении именованных чисел надо различать два случая: 1) Деление именованного числа на отвлечённое. 2) Деление именованного числа на именованное.

При делении именованного числа на отвлечённое в свою очередь встречаются два случая: деление п р о с т о г о именованного числа и деление с о с т а в н о г о именованного числа на отвлечённое. Оба эти случая надо объяснить учащимся.

```
1) _23 часа | 5                    2) _56 мин. 42 сек. | 18
    20      |4 часа 36 мин.            54               3 мин. 9 сек.
    3 часа                             2 мин.
   _180 мин.                          _162 сек.
    15                                 162
     30                                  0
      0
```

Объясняя решение этих примеров, учитель подчёркивает те моменты, из которых складывается решение, а именно: деление начинается с мер высшего наименования; последовательно делятся единицы каждого наименования отдельно; если получается остаток, то он раздробляется в меры следующего низшего наименования и к полученному числу прибавляются меры того же наименования, данные в делимом; полученная сумма делится на делитель. И так деление продолжается до конца. Раздробление часов в минуты и минут в секунды производится обычно устно; раздробление других мер — года в сутки, суток в часы, если множитель двузначное число,— письменно, например:

```
_67 сут.  + 12 час. | 18
 54  »     312 час. 3 сут. 18 час.
 13       _324 час.
×24         18
  52       _144
 26         144
 312 (час.)   0
```

В этом примере раздробление остатка (13 сут.) в часы произведено путём умножения на 24, что возможно на основании переместительного свойства умножения. Далее полученное число часов (312 час.) сложено с данным числом часов в делимом (12 час.) путём подписывания 312 под 12 в целях более компактной и экономной записи.

При делении именованного числа на именованное встречаются различные случаи: а) деление простого именованного числа на простое; б) деление составного именованного числа на простое; в) деление простого именованного числа на составное; г) деление составного именованного числа на составное. Приём деления во всех этих случаях один и тот же: делимое и делитель раздробляются в меры одинакового наименования и делятся как отвлечённые числа.

Решим пример на деление составного именованного числа на составное, взяв его из задачи: «Товарный поезд должен был пройти некоторое расстояние в 15 сут. 6 час. 40 мин., затрачивая на каждый километр пути 2 мин. 45 сек. Сколько километров нужно было пройти поезду?» Чтобы решить эту задачу, нужно узнать, сколько раз 2 мин. 45 сек. содержатся в 15 сут. 6 час. 40 мин.

Для этого надо разделить 15 сут. 6 час. 40 мин. по 2 мин. 45 сек. Раздробляем делимое и делитель в секунды и делим полученные числа, как простые именованные. Запись можно вести в следующей форме:

15 сут. 6 час. 40 мин. : 2 мин. 45 сек. = 8 000 (*км*).

а) 24×15: 120, 24; $360 + 6 = 366$ (час.)

б) $366 \times 60 = 21\,960$; $21\,960 + 40 = 22\,000$ (мин.)

в) $22000 \times 60 = 1\,320000$ (сек.)

г) 2 мин. 45 сек. = 165 сек.

д) 1 320 000 сек. : 165 сек. = 8 000; 1 320

ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ.

В задачи на вычисление времени входят три величины: 1) продолжительность данного события, 2) его начало и 3) конец. Так как каждая из этих величин может служить искомой, а две остальные — данными, то задачи на вычисление времени могут быть трёх видов:

1) Задачи на определение продолжительности события, если даны начало и конец события, например: «Пароход вышел в море 12 мая и пришёл к месту назначения 18 числа того же месяца. Сколько дней пароход был в пути?»

2) Задачи на вычисление конца события, если даны начало события и его продолжительность, например: «Пароход вышел в море 12 мая и был в пути 6 суток. Когда пароход прибыл на место назначения?»

3) Задачи на определение начала события, если даны конец события и его продолжительность, например: «Пароход прибыл на место назначения 18 мая, пробыв в пути 6 суток. Когда вышел пароход в море?»

Задачи на время могут относиться к промежуткам времени: а) в пределах суток, б) в пределах месяца, в) в пределах года и г) в пределах одного или нескольких столетий, например:

«Собрание началось в 6 час. 30 мин. вечера и закончилось в 8 час. 15 мин. Сколько времени продолжалось собрание?» В этой задаче данное событие (собрание) совершается в пределах суток. «Летний санаторий открылся 20 мая и закрылся 15 сентября. Сколько дней работал санаторий?» Эта задача затрагивает событие, совершающееся в пределах года.

Существует два способа решения задач на время, в зависимости от того, от какого момента мы ведём отсчёт времени, что мы принимаем при вычислении за начальный момент. За начало для отсчёта времени можно принять: начало эры, если событие затрагивает столетия: начало года, если событие совершается в

пределах года, или начало суток, если событие происходит в пределах суток. Но можно выбрать и иное начало: за начальный момент при вычислении времени можно принять одно из тех событий, которое дано в задаче.

Пока дети решают задачи на время в пределах суток и месяца, целесообразно относить данные в задаче моменты не к одному (общему) началу (к началу суток, к началу месяца), а за начало принимать данное в задаче событие. Но когда учащиеся перейдут к решению задач на время в пределах года, столетия или нескольких столетий, тогда отсчёт времени ведётся от общего начала — от начала года или эры. Это требует уменья переводить календарные даты в арифметические числа и, наоборот, уменье заменять арифметические числа календарными датами.

Рассмотрим приёмы решения задач трёх видов на время в пределах суток, года и столетий.

Задачи на вычисление времени в пределах суток.

Задача 1: «Занятия в школе начались в 8 час. 30 мин. утра и закончились в 1 час. 15 мин. дня. Сколько времени продолжались занятия?»

Объяснение решения: от 8 час. 30 мин., до полудня, т. е. до 12 час. прошло 3 часа 30 мин. да ещё после 12 час. занятия шли 1 час. 15 мин. Всего же занятия продолжались 3 часа 30 мин. + 1 час 15 мин. = 4 часа 45 мин.

Задача 2: «Заседание сессии городского совета депутатов трудящихся началось в 1 час. 30 мин. дня и продолжалось 3 час. 15 мин. Когда окончилось заседание сессии?»

Объяснение решения: заседание закончилось позже начала на 3 час. 15 мин.; для ответа на вопрос задачи нужно к 1 часу 30 мин. прибавить 3 час. 15 мин.; 1 час 30 мин. + 3 час. 15 мин. = 4 час. 45 мин. Значит, заседание сессии закончилось в 4 час. 45 мин. дня, или, иначе говоря, без четверти 5 час.

Задача 3: «Рабочий вернулся домой с работы в 4 час. 30 мин. дня. На заводе он пробыл всего 7 час. 45 мин. Когда рабочий ушёл из дому на завод?»

Объяснение решения: уход рабочего из дому произошёл на 7 час. 45 мин. раньше его ухода. Значит, нужно из 4 час. 30 мин. пополудни или от 16 час. 30 мин. вычесть 5 час. 45 мин.

− 16 час.	30 мин.	
7 »	45 »	
8 час.	45 мин.	

Решение этих задач возможно и другим способом: например, решая первую задачу, можно рассуждать так: «От начала суток (от полуночи) до конца занятий прошло 12 час. + 1 час. 15 мин. = 13 час. 15 мин. От начала же суток до начала занятий прошло 8 час. 30 мин. Следовательно, занятия продолжались 13 час. 15 мин. — 8 час. 30 мин. = 4 часа 45 мин.».

Задачи на вычисление времени в пределах года.

Задача 1: «Судоходство на реке Волге в её среднем течении началось 20 апреля и закончилось 10 ноября. Сколько времени продолжалась навигация?»

Решение: от 20 апреля до 1 мая прошло 10 дней. Дальше считаем месяцами с мая по октябрь включительно — 6 месяцев. В ноябре — 10 дней. Сложим все эти промежутки времени: 6 мес + 10 дн. + 10 дн. = 6 мес. 20 дней.

Задача 2: «Пионерский лагерь открылся 5 июня и работал 2 мес. 20 дн. Когда закрылся пионерский лагерь?»

Решение: с 5 июня по 5 июля прошёл один месяц, по 5 августа прошёл другой месяц. Присчитаем к 5 августа 20 дней, получим 25 августа. Следовательно, лагерь закрыли 25 августа.

Задача 3: «Во время Великой Отечественной войны Киев был освобождён от немецких захватчиков 5 ноября 1943 г. Освобождение же Харькова произошло на 74 дня раньше. Когда был освобождён город Харьков?»

Решение: отсчитываем 5 дней ноября, получаем 31 октября. Отсчитав октябрь и сентябрь, мы ещё отсчитаем 61 день, а всего с 5 днями ноября 66 дней. До 74 нехватает 8 дней (74 — 66 = 8). Отсчитываем в августе 8 дней (31 — 8 = 23), получаем 23 августа. Значит, Харьков был освобождён 23 августа 1943 г.

Задачи на вычисление времени в пределах столетий.

Решение этих задач требует от ученика уменья переводить календарные даты в арифметические числа и наоборот. Число, обозначающее время какого-нибудь события, называют календарным числом; таковы числа: 7 ноября 1917 г., 1 мая 1947 г. Календарное число всегда отвечает на вопрос: когда произошло данное событие?

Число, которое выражает время, протекшее от одного момента до другого, есть собственно арифметическое число. Оно отвечает на вопрос: «Сколько?» Например: «Сколько времени прошло от Куликовской битвы до Бородинского боя?» (431 год 11 мес. 18 дней.) «Сколько времени прошло от 1 мая до 7 ноября?» (6 мес. 6 дней.)

Действия можно производить только над арифметическими числами. Календарную дату вводить непосредственно в вычисление нельзя: нелепо, например, вычитать 14 июня из 6 декабря. В задачах же на время даются и календарные, и арифметические числа. Чтобы можно было произвести над ними то или иное арифметическое действие, необходимо календарное число преобразовать в арифметическое. Перевести календарное число в арифметическое — значит высчитать, сколько времени прошло до известного события от начала летосчисления (или от начала столетия, начала года и т. д.): 22 июня 1941 г. соответствует 1940 г. 5 мес. 21 дн.; это значит, что от начала летосчисления прошло полных 1940 лет 5 мес. 21 день; 12 октября — календарная дата, соответствует арифметическому числу: 9 мес. 11 дней, т. е. от начала года до 12 октября прошло полных 9 мес. 11 дней.

Перевести арифметическое число в календарное — это значит определить, когда произошло событие, зная время, прошедшее от начала летосчисления (или года, месяца), например: от начала летосчисления до начала Великой Отечественной войны прошло полных 1940 лет. Значит, Великая Отечественная война началась в 1941 г.

Задача 1: «Великий русский поэт Александр Сергеевич Пушкин родился в 1799 г., а умер в 1837 г. Сколько лет жил Пушкин?»

Решение: от начала летосчисления до смерти Пушкина прошло полных 1836 лет.

От начала летосчисления до рождения Пушкина прошло полных 1798 лет. Чтобы узнать, сколько времени жил Пушкин, нужно из 1836 лет вычесть 1798 лет.

$$\begin{array}{r} 1836 \text{ лет} \\ -\ 1798 \text{ »\ \ } \\ \hline 38 \text{ лет} \end{array}$$

Ответ: 38 лет.

Задача 2: «Академия наук была основана в России в 1724 г., а Московский университет был открыт через 31 год. Когда был открыт Московский университет?»

В этой задаче даны начало события и промежуток времени, отделяющий

два события; требуется узнать, когда произошло второе событие. Для решения задачи нужно календарное число увеличить на 31 год.

От начала летосчисления до момента открытия Академии наук прошло 1723 года. К этому числу прибавим 31 год.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 1723 \text{ года} \\ 31 \text{ »} \end{array} \\ \hline 1754 \text{ года} \end{array}$$

Следовательно, от начала летосчисления до открытия университета в Москве прошло полных 1754 года. Когда же произошло открытие университета? Для ответа на этот вопрос переведём полученное арифметическое число в календарное: событие произошло в 1755 г.

Задача 3: «Знаменитый русский писатель Николай Васильевич Гоголь умер в 1852 г., прожив около 43 лет. Когда родился Гоголь?»

В этой задаче даны конец события (смерть Гоголя) и продолжительность жизни Гоголя. Требуется определить начало события (рождение Гоголя). Дата смерти писателя выражена календарным числом. Переведём его в арифметическое число. От начала летосчисления до момента смерти Гоголя прошло полных 1851 год. День рождения был на 43 г. раньше. Следовательно, нужно из 1851 года вычесть 43 г.

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 1851 \text{ года} \\ 43 \text{ »} \end{array} \\ \hline 1808 \text{ лет} \end{array}$$

Значит, Н. В. Гоголь родился в 1809 году.

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ.

ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ.

Изучением действий с отвлечёнными и составными именованными числами заканчивается в основном изучение целых чисел. Наступает пора расширить у детей представление о числе и познакомить их с новым для них видом чисел — дробным числом. Восприятие дробных чисел и усвоение действий над ними представляют для детей некоторую трудность, вполне, однако, преодолимую ими.

Дети, как показывают наблюдения, живо интересуются новыми для них дробными числами. Они находят в них отражение своего жизненного опыта. Наличие у ребёнка конкретного опыта и повышенный интерес к дробям представляют надёжную основу для успешной работы по освоению этого нового раздела арифметики.

Чтобы облегчить детям переход от целых чисел к дробным и обеспечить усвоение дробей с надлежащей ясностью и пониманием, в программе даётся сначала пропедевтика дробей. Задача пропедевтики — дать детям наглядное, вполне конкретное, образное представление о долях — о том, что целое (яблоки, круг, квадрат и т. д.) можно делить на части, что часть получает своё название в зависимости от числа, на которое делится целое, что доли

могут быть разной величины и что считать можно не только целыми единицами, но и долями единицы.

Действия над простейшими дробями совершаются не по правилам, а на основе рассуждений, вытекающих из наглядного представления дробных чисел. Только после такой подготовки можно перейти в V классе к изучению систематического курса дробей с его многочисленными правилами, логическими обоснованиями и доказательствами.

При изучении дробей процесс отвлечения и обобщений должен протекать ещё медленнее, чем это было в области целых чисел. Ребёнка надо провести через все последовательные ступени конкретного обучения:

1) Сначала непосредственное дробление предметов (картонного круга, полоски бумаги) на равные части; 2) затем получение равных долей путём деления на чертеже и рисунке (де-

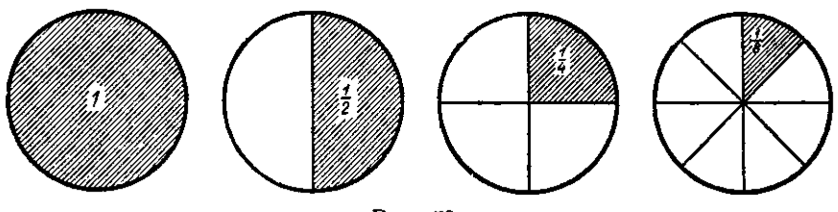


Рис. 59.

ление пополам, на четыре и восемь равных частей) отрезка прямой, изображения круга, прямоугольника, квадрата; 3) наблюдение равных долей на различных чертежах, и, наконец, 4) проведение операций с дробями по представлению путём решения задач с дробными числами.

Вся пропедевтика дробей должна иметь в своей основе применение наглядности в самых широких размерах и в самой яркой и убедительной форме. Каждой операции с дробным числом — будь то образование долей, или их преобразование, или действия над долями — должны предшествовать операции над предметами, рисунками, чертежами, разделёнными на равные доли. Наглядными пособиями в руках учителя могут служить картонные или фанерные круги — целые и разделённые на секторы (рис. 59), полоски бумаги или картона, прямоугольники и квадраты из фанеры или картона (рис. 60), деревянные цилиндрики на шведских счётах и др. На первых шагах обучения дробям среди этих пособий предпочтение нужно отдать кругам.

Часть круга, иллюстрирующая ту или иную долю единицы, резко отличается от целого круга — единицы. В то время как часть отрезка линии есть отрезок, часть прямоугольника есть прямоугольник, часть круга не является кругом и по своей форме резко от него отличается. Это отнюдь не значит, что отрезков, квадратов и прямоугольников следует избегать как наглядных

пособий. Речь идёт только о преимущественном употреблении круга и предметов шарообразной формы при **первоначальном** ознакомлении с дробным числом.

Наглядность при изучении дробей должна иметь действенный характер, т. е. учащиеся должны иметь у себя на руках дидактический материал, оперируя с которым, они могут получать доли различной величины и производить над ними действия, после чего они производят действия и над дробными числами.

Порядок изучения дробей следующий:

1. Образование долей «половина», «четверть», «восьмая» и дробей, составленных из этих долей. Образование долей «пятая» и «десятая» и дробей, составленных из них.

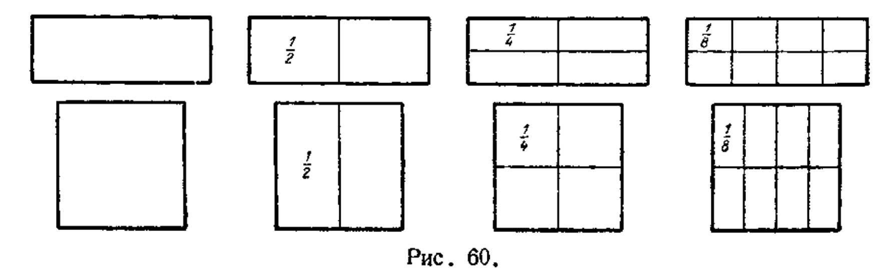


Рис. 60.

2. Образование смешанного числа.
3. Преобразование смешанного или целого числа в неправильную дробь и исключение целого числа из неправильной дроби.
4. Преобразование одних долей в другие.
5. Сложение и вычитание одноимённых и кратных долей.

ОБРАЗОВАНИЕ ДРОБИ.

Из всех способов образования дробного числа на этой ступени рассматривается только один способ: фактическое деление предметов на равные части. Понятие о дроби вырабатывается постепенно, путём деления предметов на равные доли, и в конце концов оно оформляется в отвлечённое понятие, как понятие части или доли единицы.

Первые уроки по ознакомлению с долями единицы должны быть особенно тщательно подготовлены, так как на них именно закладывается основа правильного представления о дробном числе. Они должны быть хорошо оснащены наглядными пособиями, у каждого ученика должен быть дидактический материал — или круги из бумаги, картона, или полоски бумаги, или просто листы бумаги из исписанной тетради. Методика проведения уроков должна быть тщательно продумана. На первых уроках ученики знакомятся с образованием $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,

Знакомство с половиной$\left(\frac{1}{2}\right)$. Учитель даёт каждом ученику по два картонных или бумажных круга диаметром в 10 *см.* У себя же для направления работы учеников имеет круг диаметром в 20—25 *см.* Учитель сгибает свой круг пополам, а затем аккуратно разрывает или разрезает целый круг на 2 равные части.

«Круг я разделил на 2 равные части. Каждая полученная часть есть половина. Получилось две половины»

«Разделите и вы свой круг пополам. Сколько получилось половин?» (Две половины.) «Покажите одну половину круга. Покажите другую половину круга. Наложите обе половины на круг. Сколько в целом круге половин?» (В целом круге две половины.) «Когда вы приложили одну половину к другой, что получилось?» (Получился целый круг.) «Да, из двух половин можно составить целый предмет. Наложите одну половину на другую. Что можно сказать про обе половины — каковы они между собой по величине?» (Половины равны.) «Приложите к целому кругу половину. Сколько всего получилось половин?» (Три половины.)

Учитель поясняет, что три половины — это полтора.

«Сколько же целых кругов и половин составляют полтора круга?» (Один целый круг и одну половину.) «Сколько половин будет в двух кругах?» (В дв кругах четыре половины). «Как вы сосчитали?» (В одном круге две половины да в другом круге две половины; 2 да 2 = 4.) «Из двух равных половин сколько целых кругов можно составить?» (Из двух равных половин можно составить один целый круг.) «Из четырёх одинаковых половин сколько целых кругов можно составить?» (2 целых круга.)

«Повторим всё, что мы узнали о половине.

Если целый круг разделить на 2 равные части, каждая часть будет половиной круга.

Чтобы получить половину круга, надо ц е л ы й круг разделить на две р а в н ы е части. В целом круге две половины. Половины равны. Из двух половин можно составить целый круг. Из трёх половин составляется целый круг и его половина, или полтора».

Все эти сведения сначала воспроизводятся по вопросам учителя, а потом некоторые ученики могут передать их в связной речи.

«Теперь я покажу вам, как записывается половина. Пишется она так: $\frac{1}{2}$. Наверху пишется 1, под ней проводится небольшая черта, а под чертой ставится 2».

Учитель объясняет эту запись так: чтобы получить половину, мы делим круг на две равные части. Число 2 пишется п о д чертой. Таких частей мы взяли о д н у. Единица пишется н а д чертой.

На каждой половине круга дети пишут цифрами $\frac{1}{2}$

Знакомство с четвертью $\left(\frac{1}{4}\right)$ даётся сначала на делении кру-

гов, а потом на делении листа бумаги (из исписанной ученической тетради). У каждого ученика должно быть по 2 картонных или бумажных круга и два листа бумаги. У учителя должно быть то же, он больших размеров.

Учитель сгибает один из своих кругов пополам и затем аккуратно разрезает его на две равные части. Получаются знакомые детям две половины. Затем каждую половину снова сгибает пополам и делит её на две равные части. Получаются четыре четверти круга.

«На сколько равных частей я разделил целый круг?» (На 4 равные части.) «Каждая такая часть будет четверть круга. Разделите и вы свой круг на 4 равные части, на 4 четверти».

Дети делят круги так же, как делил учитель.

«Сколько же в целом круге четвертей?» (Четыре четверти.)

«Покажите одну четверть круга». (Вот одна четверть круга.) «Покажите две четверти. Покажите три четверти; четыре четверти. Что составляют четыре четверти?» (Четыре четверти составляют целый круг.) «Сколько четвертей в двух кругах? в трёх кругах? в четырёх кругах? Как вы нашли, что в трёх кругах 12 четвертей?» (В одном целом круге 4 четверти, в трёх целых кругах в 3 раза больше, $4 \times 3 = 12$.) «Сколько целых кругов составят 8 четвертей? 12 четвертей? 16 четвертей? Как вы узнали, что 8 четвертей составят два целых круга? Наложите одну четверть круга на другую (учитель показывает, как надо производить наложение). Что можно сказать о величине этих четвертей?» (Четверти равны между собой.)

«Как можно из половины круга получить четверти?» (Половину круга надо разделить на 2 равные части, или пополам.)

«Как же можно получить четверть из целого круга? Из половины круга?» (Целый круг разделить на 4 равные части. Половину круга разделить на 2 равные части). «Сколько четвертей в половине круга?»

«Как получить из целого круга три четверти?» (Надо целый круг разделить на 4 равные части и взять три такие части.) «Как получить из целого круга две четверти?» (Надо целый круг разделить на 4 равные части и взять две такие части.)

«Вот как пишется одна четверть». Учитель пишет и объясняет запись одной четверти $\left(\frac{1}{4}\right)$, подобно тому как он объяснял запись $\frac{1}{2}$. «А как написать две четверти $\left(\frac{2}{4}\right)$? Три четверти $\left(\frac{3}{4}\right)$?»

«Повторим всё, что мы узнали о четверти: чтобы получить четверть круга, надо целый круг разделить на 4 равные части. Четверти равны между собой. В целом круге 4 четверти. В половине круга 2 четверти. Из 4 четвертей можно составить целый круг. Из 2 четвертей можно составить одну половину. Чтобы получить две четверти, надо целый круг разделить на 4 равные части и взять две такие части. Чтобы получить три четверти, надо целый круг разделить на 4 равные части и взять три такие части. Одна четверть пишется так: $\frac{1}{4}$, две четверти — $\frac{2}{4}$, три четверти — $\frac{3}{4}$».

Познакомившись с получением четверти на делении круга, дети делят дальше полоску бумаги, прямоугольники и повторяют те выводы, которые были сделаны при делении круга на 4 равные части.

Знакомство с $\frac{1}{8}$ даётся на тех же наглядных пособиях и в том же плане, в каком давалось конкретное представление об $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$. При делении предмета на 8 частей надо подчеркнуть способ последовательного деления: чтобы разделить предмет на 8 равных частей, надо разделить его пополам, потом каждую половину разделить пополам и полученные доли — снова пополам.

Затем здесь надо подольше остановиться на раздроблении и превращении долей, показав на наглядных пособиях, что в целом круге 8 восьмых, в половине круга 4 восьмых, в четверти круга 2 восьмых, в двух четвертях 4 восьмых, в трёх четвертях 6 восьмых, и наоборот: из 2 восьмушек можно составить одну четверть, из 4 восьмушек 2 четверти, или половину, из 6 восьмушек 3 четверти, из 8 восьмушек 4 четверти, 2 половины, или целый круг.

При изучении восьмой доли ученикам показывается процесс получения дроби, состоящей из нескольких долей, и запись таких дробей: $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ и др. Особое ударение делает учитель на вопросах: «Как получить $\frac{3}{8}$ круга? Как получить $\frac{5}{8}$ листа бумаги? Как получить $\frac{7}{8}$ квадрата?», добиваясь от учеников ответа: «Чтобы получить $\frac{3}{8}$ круга, надо целый круг разделить на 8 равных частей и взять 3 такие части. Чтобы получить $\frac{5}{8}$ листа, надо целый лист разделить на 8 равных частей и взять 5 таких частей» и т. д.

Знакомство с $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{10}$. Для ознакомления учащихся с пятой и десятой долями нужно использовать метр и дециметр. У каждого учащегося должна быть линейка с делениями на сантиметры. На этой линейке учащиеся показывают $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ метра и т. д. Здесь же они видят, что $\frac{1}{10}$ метра — это 1 дециметр, $\frac{2}{10}$ метра — 2 дециметра, $\frac{3}{10}$ метра — 3 дециметра и т. д. Далее, за целое, за

единицу они принимают 1 дециметр и делят его на 10 равных частей; получают $\frac{1}{10}$ *дм*, или 1 *см*, $\frac{2}{10}$ *дм*, или 2 *см*..., $\frac{9}{10}$ *дм*, или 9 *см*. Наконец, за единицу можно принять 1 *см* и делить его на 10 равных частей; тогда десятые доли будут означать миллиметры. Из десятых долей получаются и показываются на метре и дециметре соответствующие дроби: $\frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$ и т. д. Так же, как и при ознакомлении с $\frac{1}{8}$, учитель здесь довольно подробно останавливается на раздроблении и превращении десятых долей в пятые и в половины, показывая на метре, что в целом метре 10 десятых, в половине 5 десятых, в одной пятой метра 2 десятых, в двух пятых 4 десятых, в трёх пятых 6 десятых, в четырёх пятых 8 десятых; из двух десятых можно составить 1 пятую, из четырёх десятых 2 пятых, из шести десятых 3 пятых, из восьми десятых 4 пятых, из десяти десятых 5 пятых, или целый метр (круг, квадрат и пр.). И здесь учитель ставит те же вопросы: как получить $\frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{7}{10}$ метра? как получить $\frac{3}{5}$ метра? $\frac{4}{5}$ круга? и т. д.

Дробь. Числитель и знаменатель дроби. На этой ступени обучения определение дроби можно не давать; достаточно сказать ученикам, что такие числа, как половина, четверть, восьмая, пятая, десятая, семь десятых, пять восьмых, три четверти и др., называются дробными числами, или дробями. Они называются так потому, что для получения их единица делится, или дробится, на равные части. После этого учитель предлагает ученикам откладывать на шведских счётах, на верхних проволоках, различные дроби: половину, три четверти, две восьмых, четыре пятых, семь десятых.

Запись и чтение дроби мы связали с процессом её образования на наглядных пособиях, чтобы крепче связать в сознании детей цифровой и предметный образ дроби. На этих записях учащиеся уяснили себе значение числителя и знаменателя дроби. Однако здесь нужны и специальные упражнения в записи и чтении дробей; можно также ввести и термины числитель и знаменатель дроби.

Записав дробь $\frac{3}{8}$, учитель спрашивает, как получилась эта дробь. (Единицу разделили на 8 равных частей и таких частей взяли 3.)

«Сколькими числами изображается дробь?» (Двумя числами.) «Что обозначает число, записанное под чертой?» (На сколько частей разделена единица.) «Что обозначает число, стоящее над чертой?» [Сколько таких долей (частей) взято.]

Учитель сообщает, что число, стоящее под чертой, называется знаменателем дроби; оно показывает, на сколько равных частей разделена единица; а число, стоящее над чертой и показывающее, сколько таких частей

взято, называется числителем дроби: 3 — числитель, 4 — знаменатель. Учащиеся пишут эти термины в своих тетрадях, дают их определение и в дальнейшем пользуются ими в своей речи.

Смешанное число. Представление о смешанном числе дети получают на тех же наглядных пособиях, которые применялись и для иллюстрации образования дробей. С одним смешанным числом $1\frac{1}{2}$ (полтора) они уже ознакомились, когда знакомились с половиной. Теперь нужно продолжать ряд смешанных чисел.

Для этого учитель берёт 2 целых круга и ещё половину круга. Показывая их, спрашивает, сколько здесь кругов?

(Два целых и половина, или два с половиной круга.)

Записывается так: $2\frac{1}{2}$ (пишут целое число 2 и при нём дробь $\frac{1}{2}$).

Учитель предлагает зарисовать в тетрадях два с половиной круга и подписать под рисунком соответствующее число (рис. 61).

Далее учитель берёт 3 целых и три четверти круга (рис. 62).

Учащиеся называют обозначаемое ими число, рисуют в тетрадях три круга и три четверти круга и подписывают под рисунком число.

Дав ещё несколько таких конкретных примеров на $3\frac{3}{4}$ предмета и их рисунки, учитель сообщает, что целое число вместе с

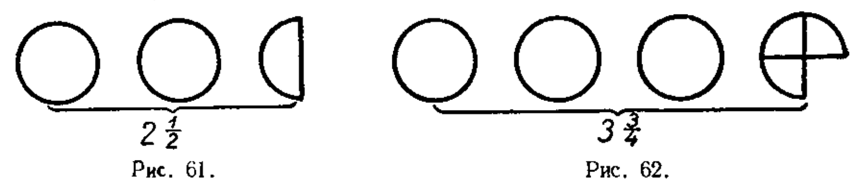


Рис. 61. Рис. 62.

дробью составляет смешанное число. Ученики называют примеры смешанных чисел, читают написанные учителем смешанные числа, иллюстрируют их рисунками. Пусть, например, учитель записал ряд смешанных чисел: $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$, $2\frac{7}{8}$.

Ученики читают эти числа и затем зарисовывают иллюстрации к ним в тетрадях (рис. 63).


Рис. 63.

Рассматривая эти числа и соответствующие им рисунки, учитель ставит вопрос: «Из скольких единиц и какой дроби состоит каждое из этих смешанных чисел?»

Обращение смешанного и целого числа в неправильную дробь. Чтобы учащимся был ясен смысл этого преобразования, было ясно, для чего нужно иногда целое

или смешанное число обращать в дробь, следует исходить из задач примерно следующего содержания.

«Имеется стальной прут длиной в 3 *дм*. Сколько выйдет из него болтов, если на один болт требуется $\frac{1}{5}$ *дм* прута?» Ясно, что болтов выйдет столько, сколько пятых долей в 3 целых дециметрах. Нужно узнать, сколько пятых долей в 3, или, иначе говоря, о б р а т и т ь 3 в пятые доли, о б р а т и т ь целое число в дробь. Сколько же пятых в 3? Покажем это на чертеже.

Начертим 3 прута целых и против них 3 прута, разделённых каждый на пять частей. В одном пруте $\frac{5}{5}$ да в другом $\frac{5}{5}$, в двух $\frac{10}{5}$ да ещё $\frac{5}{5}$ в третьем пруте. Запишем это так: $3=\frac{15}{5}$.

Следовательно, из 3 стальных прутьев выйдет 15 болтов.

Ученики должны твёрдо знать, что $1=\frac{2}{2}$, $1=\frac{4}{4}$, $1=\frac{5}{5}$, $1=\frac{8}{8}$, $1=\frac{10}{10}$.

Сначала упражнения ведутся в конкретной форме: «Возьми 3 полоски (бумажные) и сосчитай, сколько в них пятых долей (частей)». Ученик заменяет каждую полосу пятыми долями и получает ответ — 15 пятых. Затем упражнения ведутся в отвлечённой форме: «Сколько пятых в 3 единицах?» Ученик рассуждает: «В одной единице 5 пятых, в 3 единицах 15 пятых:

$$1=\frac{5}{5};\qquad 3=\frac{15}{5}».$$

Решим другую задачу, связанную с преобразованием смешанного числа.

«Имеется $2\frac{3}{4}$ листа бумаги. На каждый рисунок требуется четверть листа. Сколько рисунков можно сделать на этой бумаге?»

Очевидно, столько рисунков, сколько четвертей. Но сколько же четвертей в $2\frac{3}{4}$ листа? Изобразим это на рисунке и подсчитаем.

В одном листе $\frac{4}{4}$ да в другом $\frac{4}{4}$, в двух листах будет $\frac{8}{4}$ да ещё $\frac{3}{4}$. Всего получится $\frac{11}{4}$. Следовательно, на всей бумаге можно поместить 11 рисунков.

Решив несколько таких задач, делаем обобщение: «Какие числа были даны?» (Смешанные.) «Какими числами, равными им, мы их заменяли?» (Дробными.) «Такую замену смешанных чисел дробными называют обращением смешанного числа в дробь».

После этого решаются упражнения в обращении смешанных чисел в неправильные дроби. Примеры решаются на основе рассуждений. К наглядным пособиям учитель прибегает только в случае затруднений учащихся.

Исключение целого числа из неправильной дроби. Смысл этого преобразования выясняется на задаче, вроде следующей:

«$\frac{15}{4}$ *кг* сахара нужно развесить целыми килограммами. Сколько при этом получится целых килограммов и какая часть килограмма останется?»

Целый килограмм — это единица. Значит, задача сводится к вопросу, сколько единиц в $\frac{15}{4}$. Изобразим $\frac{15}{4}$ при помощи кругов (рис. 64).

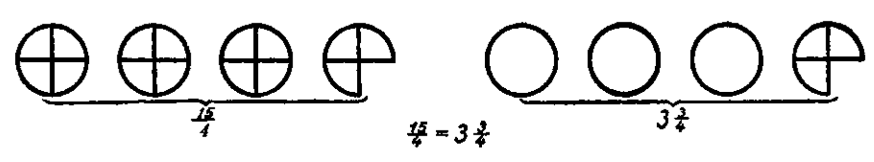


Рис. 64.

При решении этой задачи ученик рассуждает так: «Возьмём один круг, или $\frac{4}{4}$; ещё один круг, или $\frac{4}{4}$, всего стало $\frac{8}{4}$; возьмём ещё третий круг, или $\frac{4}{4}$. Всего мы взяли $\frac{12}{4}$. Возьмём ещё $\frac{3}{4}$; а всего $\frac{15}{4}$ круга. Итак, чтобы набрать $\frac{15}{4}$ круга, мы взяли 1 круг, ещё 1 круг, ещё 1 круг и $\frac{3}{4}$ четвёртого круга.

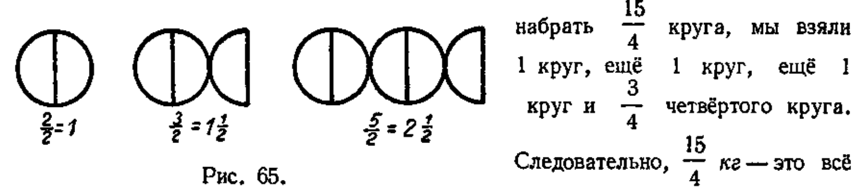


Рис. 65.

Следовательно, $\frac{15}{4}$ *кг* — это всё равно, что 3 целых килограмма и ещё $\frac{3}{4}$ *кг*. Запишем это: $\frac{15}{4}$ *кг* $= 3\frac{3}{4}$ *кг*».

Далее учитель рисует (рис. 65) и предлагает записать эту иллюстрацию в половинных долях, а затем смешанными числами.

«Сколько в этих дробях половин и единиц?» (Ученики пишут: $\frac{2}{2}=1$; $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$; $\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$).

Затем следуют упражнения на именованных числах: **«Сколько дециметров и сантиметров в 25 *см*? в 48 *см*? в 75 *см*?»**

Упражнения на отвлечённых числах:

«Сколько единиц и десятых долей в $\frac{25}{10}$? $\frac{48}{10}$? $\frac{7}{10}$? Сколько единиц и пятых долей в $\frac{16}{5}$? $\frac{27}{5}$? $\frac{42}{5}$?

Сколько единиц и четвёртых долей в $\frac{13}{4}$? в $\frac{21}{4}$? в $\frac{34}{4}$?» и т. д.

Можно давать задания в отвлечённой форме, например: исключить целое число из дроби $\frac{10}{4}$. Ученик рассуждает: «4 четверти составляют 1 единицу, 8 четвёртых — 2 единицы, остаются ещё 2 четверти, или 1 половина. Следовательно, $\frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$». Это рассуждение можно отразить в следующей записи: $\frac{4}{4} = 1$; $\frac{8}{4} = 2$; $\frac{10}{4} = 2\frac{2}{4} = 2\frac{1}{2}$.

РАЗДРОБЛЕНИЕ И ПРЕВРАЩЕНИЕ ДОЛЕЙ.

Эти преобразования рассматриваются на наглядных пособиях, и в чисто опытном порядке устанавливается, что половину можно раздробить в четвёртые и восьмые доли, пятые — в десятые; что из половины получается 2 четверти и 4 восьмых; из четверти — 2 восьмых; из двух четвертей — 4 восьмых; из одной пятой — 2 десятых; из двух пятых — 4 десятых и т. д.

Возьмём для этого четыре равные полоски: одну — цельную изображающую единицу, другую — разделённую пополам, третью — разделённую на 4 равные части и четвёртую — разделённую на 8 равных частей; приложим эти полоски одну к другой, и мы получим возможность непосредственно сравнивать доли — половину, четверти и восьмые (рис. 66).

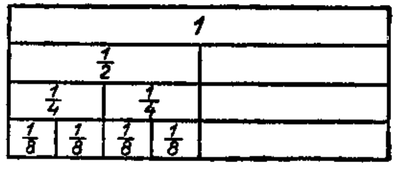


Рис. 66.

Обращая внимание учащихся на эти полоски, учитель ставит вопросы:

«Сколько четвертей в $\frac{1}{2}$? Запишите это так: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Сколько восьмых в $\frac{1}{2}$? Запишите: $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$. Сколько восьмых в $\frac{1}{4}$? Запишите: $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$».

«Сколько восьмых в $\frac{2}{4}$? в $\frac{3}{4}$? Сколько в единице вторых долей? Запишите: $1 = \frac{2}{2}$. Сколько в единице четвёртых долей? Запишите: $1 = \frac{4}{4}$. Сколько в единице восьмых долей? Запишите: $1 = \frac{8}{8}$».

Обратные упражнения: «Сколько половин составляют $\frac{2}{4}$? Запишите: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. В какие более крупные доли можно превратить $\frac{2}{8}$? $\frac{4}{8}$? Запишите: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; $\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$».

Аналогичные упражнения производятся с пятыми и десятыми долями. Для этого берутся 3 полоски, изображающие единицу, пятые и десятые доли (рис. 67).

На этих полосках показывается, что $1=\frac{5}{5}$, $1=\frac{10}{10}$, $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$, $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$, $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$, $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$, $\frac{5}{5}=\frac{10}{10}$. И наоборот: $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

Выражение одних долей в других долях производится для того, чтобы дети могли превращать более мелкие доли в более крупные (сокращать дробь), с чем они встретятся при сложении дробей. При сложении же дробей им понадобится и уменье раздроблять более крупные доли в более мелкие.

<table>
<tr><td colspan="10">1</td></tr>
<tr><td colspan="2">1/5</td><td colspan="2">1/5</td><td colspan="2">1/5</td><td colspan="2">1/5</td><td colspan="2">1/5</td></tr>
<tr><td>1/10</td><td>1/10</td><td>1/10</td><td>1/10</td><td>1/10</td><td>1/10</td><td>1/10</td><td>1/10</td><td>1/10</td><td>1/10</td></tr>
</table>

Рис. 67.

Познакомившись с раздроблением и превращением долей на наглядных пособиях, учащиеся дальше упражняются в этих преобразованиях без пособий, на основании рассуждений, опирающихся на конкретные представления.

Пусть дано раздробить $\frac{3}{5}$ в десятые доли.

Учащийся рассуждает: «Из $\frac{5}{5}$ можно получить $\frac{10}{10}$. Из $\frac{1}{5}$ — $\frac{2}{10}$, из $\frac{3}{5}$ — $\frac{6}{10}$».

Превращение долей есть преобразование, обратное раздроблению, поэтому раздробление составляет основу превращения.

Пусть дано превратить $\frac{6}{8}$ в более крупные доли. Такими долями будут четверти. Одна четверть составляется из двух восьмых, другая четверть — из двух восьмых, третья четверть — из двух восьмых, а всего из $\frac{6}{8}$ получится $\frac{3}{4}$. Запись: $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ДРОБЕЙ.

Сложение и вычитание дробей основывается на наглядных образах дробей. Первые упражнения в сложении и вычитании дробей должны производиться на предметах и их графических изображениях.

Если ученик, складывая дроби, приучится за слагаемыми видеть части предметов, то он не будет складывать числитель с числителем, а знаменатель с знаменателем.

В IV классе складываются и вычитаются одноимённые и кратные доли

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{4};\quad \frac{5}{8}-\frac{3}{8}\ \text{или}\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4};\quad \frac{3}{5}-\frac{1}{10}.$$

Ознакомление с различными случаями сложения и вычитания кратных долей можно расположить в следующей системе:

Сложение и вычитание дробей, составленных а) из половин и четвертей; б) из половин и восьмых; в) из четвертей и восьмых; г) из пятых и десятых долей.

В каждой из этих групп примеры располагаются в следующем порядке:

1. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми долями, а затем и с кратными долями без перехода через единицу:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4};\quad \frac{3}{4}-\frac{1}{4}.$$

2. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми, а затем и с кратными долями с переходом через единицу.

Покажем образцы объяснения сложения одноимённых и кратных долей.

Начинается изучение действий с дробями со сложения и вычитания половин и четвертей. Детям раздаётся по 2 круга. Учащиеся делят их пополам. Учитель предлагает к половине круга приложить другую половину и спрашивает, что получилось. Получился целый круг. Это записывается так: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

«Если от целого круга отнять одну половину, сколько останется?» Учащиеся дают ответ $\left(\frac{1}{2}\right)$ и записывают: $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (рис. 68).

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

Рис. 68.

Так же складываются и вычитаются четвёртые, восьмые, пятые, десятые доли. Когда в сумме или в остатке получаются сократимые доли, учащиеся, имея перед собой их наглядные выражения, сокращают их, например:

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\quad \frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Значительно сложнее сложение и вычитание разноимённых, но кратных долей.

Пусть дано, например, сложить $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ Иллюстрируем сложение на частях круга: берём половину круга и четверть круга. Прикладываем четверть к половине: в полученной фигуре дети узнают $\frac{3}{4}$ круга (рис. 69).

Значит: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Однако далеко не все дети обычно умеют сразу и правильно назвать сумму $\frac{3}{4}$. Многие в таком случае говорят, что в сумме получилась половина с четвертью. Чтобы навести детей на правильный ответ, можно сформулировать вопрос так: «К половине прибавить одну четверть. Сколько четвертей получится?»

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Рис. 69.

$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$

Рис. 70.

Пусть дано сложить $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{2}$. Берём $\frac{3}{4}$ круга и $\frac{1}{2}$ круга. Ставим вопрос: «Сколько надо прибавить к $\frac{3}{4}$ круга, чтобы получить целый круг?» Очевидно, $\frac{1}{4}$ круга. Разбиваем $\frac{1}{2}$ круга на $\frac{2}{4}$ и $\frac{1}{4}$ прибавляем к $\frac{3}{4}$. Получается один целый круг и ещё одна четверть круга (рис. 70). Ставим вопрос: «Как бы мы стали прибавлять $\frac{1}{2}$ круга к $\frac{3}{4}$ круга, если бы перед нами не было кругов?» Ответ на этот вопрос приведёт учащихся к следующим этапам сложения:

1) Сначала нужно $\frac{1}{2}$ раздробить в четвёртые доли. В половине две четвёртых. 2) Потом подсчитаем четверти круга: 3 четверти да 2 четверти, получится 5 четвертей. 3) Наконец, из $\frac{5}{4}$ исключаем целое число: $\frac{4}{4}$ составляют единицу, получится $1\frac{1}{4}$

Эти три этапа находят своё отражение в записи: $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=$ $=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$.

Объяснив на наглядных пособиях способ сложения и вычитания разноимённых долей, нужно решить побольше задач и примеров на эти действия, особенно задач — на них дети уясняют смысл сложения и вычитания и технику вычисления. Заключительным моментом в упражнениях должен быть беглый отвлечённый счёт на сложение и вычитание дробей.

НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТИ ЧИСЛА.

Задачи на нахождение одной и нескольких частей от числа имеют большое значение в курсе арифметики, поэтому им должно быть уделено большое внимание. В V классе такие задачи будут

решаться умножением на дробь, в III же и IV классах они решаются двумя действиями: делением и умножением.

Для понимания таких задач нужно знать, как образуется дробь и как находится определённая часть единицы. Так, например, чтобы понять смысл задания: «найти $\frac{3}{5}$ числа 40» и порядок его решения, надо знать, как находится $\frac{3}{5}$ от единицы или вообще от любого предмета. Если учащийся ясно представляет себе, как находятся $\frac{3}{5}$ круга, отрезка, полоски (сначала находится одна пятая путём деления единицы на 5 частей, а потом берутся таких три части), то смысл задания и порядок его выполнения «найти $\frac{3}{5}$ от 40» для него будет ясен. Поэтому перед решением примеров и задач на нахождение нескольких частей от числа следует показать, как найти несколько частей от круга, линии, квадрата и т. д., как обозначается дробь ($\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ и др. и что означает числитель и знаменатель.)

Объяснение и упражнения в нахождении части числа располагаются в следующем порядке:

1. Нахождение одной части числа (найти половину числа 48, четверть числа 56).

2. Нахождение нескольких частей от числа (найти $\frac{2}{5}$ числа 40, $\frac{3}{4}$ числа 96).

Задачи на нахождение одной части числа учащиеся уже решали во II классе. Здесь надо повторить решение задач и примеров этого рода и сделать вывод пока только в конкретной форме.

Вопрос: Как найти одну пятую числа 80?
Ответ: Нужно 80 разделить на 5.

Вопрос: Что нужно сделать, чтобы найти $\frac{1}{8}$ числа 96?

Ответ: 96 нужно разделить на 8, получится 12.

Решение записывается так: $\frac{1}{8}$ от $96 = 12$.

В такой записи деление не выражено явно. Чтобы подчеркнуть действие деления, при помощи которого на этой ступени находится часть числа, можно записать нахождение $\frac{1}{8}$ от 96 в форме деления: $96 : 8 = 12$.

Такой записью следует пользоваться чаще

После решения задач на нахождение одной части числа учитель переходит к решению примеров и задач на нахождение нескольких частей числа.

Сначала проделывается несколько упражнений на наглядных пособиях.

1. «Вот 32 кубика. Найдите $\frac{3}{8}$ этого числа кубиков.

Найдём сначала $\frac{1}{8}$ от 32. Для этого 32 разделим на 8, получится 4. Теперь найдём $\frac{3}{8}$ от 32. Для этого 4 умножим на 3, получится 12».

Решение записывается в виде двух действий:

$$\frac{1}{8} \text{ от } 32 = 32 : 8 = 4;$$

$$\frac{3}{8} \text{ от } 32 = 4 \times 3 = 12.$$

II. «Вот метр. Найдите $\frac{3}{4}$ метра. Сколько это составит сантиметров?

Найдём сначала $\frac{1}{4}$ метра. В метре 100 *см*. Разделим 100 *см* на 4, получится 25 *см* (ученики показывают на метре его четверть — 25 *см*). Теперь найдём $\frac{3}{4}$ метра. Для этого 25 *см* умножим на 3, получится 75 *см*» (ученики показывают на метре $\frac{3}{4}$ его длины — 75 *см*).

Запись решения: $\frac{1}{4}$ *м* = 100 *см* : 4 = 25 *см*;

$\frac{3}{4}$ *м* = 25 *см* × 3 = 75 *см*

Далее идут упражнения в устном решении задач и примеров следующего содержания:

Сколько граммов в $\frac{2}{5}$ *кг*? в $\frac{3}{4}$ *кг*? в $\frac{7}{10}$ *кг*? в $\frac{1}{8}$ *кг*? в $\frac{3}{10}$ *кг*?

Сколько метров в $\frac{1}{10}$ *км*? в $\frac{4}{5}$ *км*? в $\frac{1}{8}$ *км*? в $\frac{9}{10}$ *км*? в $\frac{5}{8}$ *км*?

Сколько минут в $\frac{1}{2}$ часа? в $\frac{1}{4}$ часа? в $\frac{7}{10}$ часа? в $\frac{3}{10}$ часа? в $\frac{3}{4}$ часа?

Сколько сантиметров в $\frac{1}{10}$ *м*? в $\frac{3}{5}$ *м*? в $\frac{4}{5}$ *м*? в $\frac{3}{10}$ *м*? в $\frac{3}{4}$ *м*?

При решении этих задач-примеров учитель добивается от учеников чёткого разграничения двух этапов: а) нахождения сначала одной части числа, б) потом н е с к о л ь к и х частей числа. Все предыдущие упражнения в достаточной мере подгото-

вили учеников к решению сложных письменных задач на нахождение нескольких частей от числа. Приведём образец письменного решения одной из задач этого вида:

Задача: «Из Ленинграда вышел поезд, состоящий из 15 вагонов. В каждом вагоне помещается в среднем по 56 пассажиров, из них $\frac{9}{10}$ едет до Москвы. Сколько пассажиров едет до Москвы?»

План и решение задачи.

1. Сколько пассажиров помещается в 15 вагонах?

56 пасс. × 15 = 840 пасс.

2. Чему равняется $\frac{1}{10}$ часть числа пассажиров?

840 пасс. : 10 = 84 пасс.

3. Чему равняется $\frac{9}{10}$ частей числа пассажиров, или сколько пассажиров едет до Москвы?

84 пасс. × 9 = 756 пасс.

Ответ: 756 пассажиров.

Для решения этой задачи мы поставили 3 вопроса, расчленив нахождение $^9/_{10}$ на два вопроса. Так и следует поступать в III классе, где впервые решаются такие задачи. Но в IV классе последние 2 вопроса можно объединить в один: «Сколько пассажиров едет до Москвы?»

Решение же его можно обозначить двумя действиями, записанными либо раздельно:

840 пасс. : 10 = 84 пасс.
84 пас. × 9 = 756 пасс.

либо в одной строчке: 840 пасс. : 10 × 9 = 756 пасс.

Примерное содержание контрольной работы.

Примеры:

1) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} =$ 4) $\frac{2}{5} = \frac{\quad}{10}$ (вставить пропущенный числитель)

2) $\frac{1}{8} + \frac{1}{2} =$ 5) $\frac{6}{8} = \frac{\quad}{4}$ » » »

3) $1 - \frac{3}{10} =$ 6) Сколько минут в $\frac{3}{4}$ часа?

Задача:

В школу привезли 1 200 тетрадей. Из них $\frac{3}{8}$ были в клетку, $\frac{2}{5}$ в одну линейку, а остальные были в косую линейку. Сколько тетрадей было в косую линейку?

НАХОЖДЕНИЕ ЧИСЛА ПО ДАННОЙ ЕГО ЧАСТИ.

Решение задач на нахождение числа по данной его части является введением к изучению деления на дробь, подобно тому, как задача на нахождение части числа является вводной к изучению умножения на дробь. Благодаря этим двум задачам про-

педевтика обыкновенных дробей в начальной школе носит до некоторой степени законченный характер: в ней имеются не только сложение и вычитание дробей, но и пропедевтика умножения и деления целого числа на дробь.

В задаче на нахождение числа по данной его части затрудняет ученика понимание её смысла. Учащиеся смешивают эту задачу с известной им задачей на нахождение части от числа. Находя, например, число, $\frac{3}{4}$ которого равны 48, ученики долго не осознают того, что 48 — это не всё число, а только часть, три четверти его, т. е. три его части из четырёх. Поэтому, получив такую задачу, они начинают вычислять $\frac{3}{4}$ от 48.

Чтобы преодолеть эти трудности и научить детей решать такие задачи, нужно: а) выяснить смысл задачи на конкретных, образных примерах; б) сопоставить эту задачу с задачей на нахождение части числа; в) дать достаточное количество упражнений в решении задач этого типа, возвращаясь к ним и неоднократно повторяя их; ограничиться в IV классе нахождением числа только по одной его части.

Нахождение числа по одной его части.

Сущность вопроса выясняется на задаче.

«На доске изображён отрезок прямой, причём видна только **ч а с т ь** его (другая часть закрыта бумагой). Найти длину всего отрезка, если известно, что открытая часть составляет только $\frac{1}{4}$ всего отрезка, и эта $\frac{1}{4}$ равна 2 *дм*».

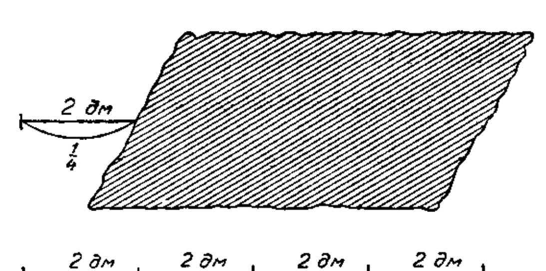


Рис. 71.

Тщательно объясняется смысл задачи: что в ней известно и что является **и с к о м ы м**. Известна **ч а с т ь** отрезка, находится **в е с ь** отрезок по известной его части. **Ч е т в е р т ь** отрезка составляет 2 *дм*, чему равен **ц е л ы й** отрезок?

На доске даётся графический образ отрезка. Учащиеся рассуждают так: «В целом отрезке, который принимается за единицу, $\frac{4}{4}$. Если в одной четверти 2 *дм*, то в 4 четвертях дециметров в 4 раза больше, т. е. 8 *дм*. Запись решения задачи:

1 четверть отрезка составляет 2 *дм*,
4 четверти » » 2 *дм* $\times$ 4 = 8 *дм*

Решение проверяется непосредственным измерением всего отрезка. Весь отрезок действительно оказался равным 8 *дм*.

Решим вторую задачу с графическим её изображением и подробной записью:

«$\frac{1}{5}$ всей площади огорода засажена капустой. Чему равна вся площадь огорода, если известно, что капустой засажено 40 *кв. м*?»

Графическое изображение задачи:

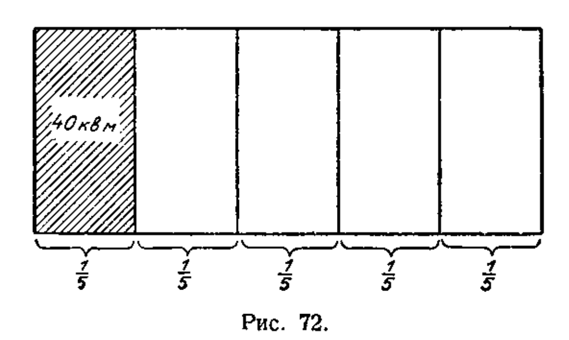


Рис. 72.

Ход рассуждения таков: «В целом огороде 5 пятых. Если в одной пятой 40 *кв. м*, то в 5 пятых в 5 раз больше, т. е. $40 \times 5 = 200$ (*кв. м*)».

Запись: $\frac{1}{5}$ площади огорода составляет 40 *кв. м*,

$\frac{5}{5}$ » » » 40 *кв. м* $\times 5 = 200$ *кв. м*.

Чтобы углубить понимание этого рода задач и закрепить в сознании ученика способ их решения, нужно побольше решить задач с разнообразным содержанием, например:

«$\frac{1}{4}$ *кг* масла стоит 8 руб. Сколько стоит целый килограмм масла?»

«Ваня вынул из бумажника $\frac{1}{3}$ своих денег. Сколько всего денег у Вани, если он вынул 4 рубля?»

«Пешеход прошёл 8 *км*, и это составляет только $\frac{1}{10}$ часть того пути, который ему надо пройти. Чему равен весь путь?»

После того как будет решено несколько таких задач и учащиеся в основном усвоят способ их решения, нужно **сопоставить** решение этих задач с задачами на нахождение части числа, сравнив задачи, их графические образы и способы их решения.

Это нужно сделать на двух-трёх парах задач с аналогичным содержанием, например:

1. «Отрезок прямой равен 12 *см*. Найти $\frac{3}{4}$ этого отрезка». (Рис. 73.).

2. «$\frac{1}{8}$ отрезка составляет 3 *см*. Найти весь отрезок». (Рис. 74).

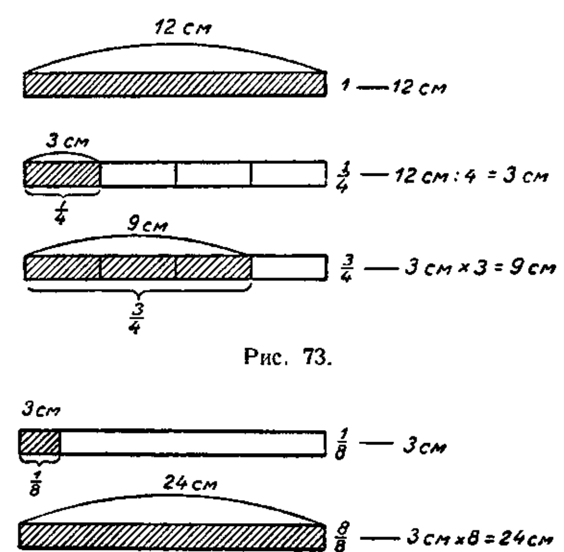


Рис. 73.

Рис. 74.

Иллюстрации помогают уяснить учащимся, что эти задачи обратные одна другой: что в первой дано, то во второй — искомое, и наоборот. Помогают они лучше понять и способ их решения.

Заканчиваются упражнения решением отвлечённых примеров, в которых искомое обозначается через x, например:

«$\frac{1}{10}x = 4$. Чему равно неизвестное число?»

Решение: $\frac{1}{10}x = 4$;

$\frac{10}{10}x = 4 \times 10 = 40$;

$x = 40$.

ПРОЦЕНТЫ.

В вопросе о процентах начальная школа ограничивает свои задачи тем, что даёт учащимся понятие о проценте и учит их решать задачи, в которых требуется найти один или несколько процентов от числа, выраженного в круглых сотнях.

Понятие процента. Процентом числа называется сотая часть этого числа. Таким образом, процент числа и сотая часть числа — понятия тождественные. Это тождество и нужно установить в сознании учащихся.

Графическое представление о проценте можно дать на круге.

Если круг разделить на 100 равных частей (клинышков или секторов), то каждая такая часть (сектор) будет составлять $\frac{1}{100}$ круга или 1% круга. 5 клинышков составляет 5%, 25 клинышков 25% и т. д

Покажите на круге 2%, 10%, 50%. Копейка составляет $\frac{1}{100}$, или один процент, рубля. Один рубль составляет $\frac{1}{100}$, или один процент, от сотни рублей.

Рис. 75.

Решим задачу: «Служащий получил 400 руб. зарплаты. Одну сотую этой суммы он внёс для уплаты членского взноса. Сколько рублей составляет членский взнос?»

Чтобы решить эту задачу, нужно 400 разделить на 100, получим 4; 4 — одна сотая часть, или один процент, числа 400.

Этих примеров достаточно, чтобы у учащихся составилось представление о проценте как сотой части числа и чтобы дать определение процента. Далее решаются устные задачи и примеры на нахождение одного процента от числа, например:

«На склад привезли 900 *куб. м* дров. Один процент этих дров были берёзовые дрова. Сколько кубометров берёзовых дров привезли на склад?» Решая эту и подобные ей задачи, надо ставить вопросы: «Что такое процент? Что значит найти один процент от числа 900? Как это сделать?»

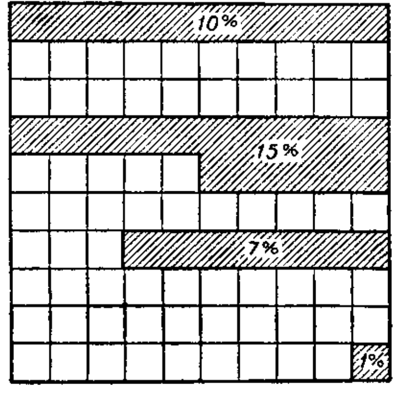


Рис. 76.

Нахождение нескольких процентов от числа. Так как найти несколько процентов от числа — значит найти часть числа, несколько сотых числа, то необходимо, прежде чем перейти к вычислению нескольких процентов, повторить с учащимися способ нахождения части предмета, а затем части числа, например:

«Как найти $\frac{3}{4}$ полоски? $\frac{5}{8}$ полоски? $\frac{9}{10}$ круга? $\frac{7}{100}$ круга? Как найти $\frac{5}{6}$ от 48? $\frac{4}{5}$ от 60?»

Затем можно дать иллюстрацию нескольких процентов на квадрате со стороной в 10 *см*, разделённом на 100 квадратных клеток, где каждая клетка составляет 1% квадрата, а следовательно, 10 клеток составит 10 сотых, или 10%; 15 клеток — 15 сотых, или 15%, и т. д. По предложению учителя ученики находят заданное им число процентов на площади квадрата:

«Найдите 2%; 15%; 10%; 7% площади этого квадрата».

Тут же ученики знакомятся с обозначением процента при помощи знака % и упражняются в чтении записанных учителем на доске чисел, обозначающих проценты, в записи названного учителем числа процентов.

Прочитайте: 1%; 8%; 14%; 76%; 95%; 100%.

Запишите: 7 процентов; 24 процента; 60 процентов.

Что значит найти столько-то процентов от числа

$$\left(13\% = \frac{13}{100};\ 27\% = \frac{27}{100}\right)?$$

Как найти столько-то процентов от числа?

Вычислите 17% от числа 2 400; 32% от числа 700 и т. д.

Вычисление нескольких процентов от числа производится двумя действиями.

Пусть требуется, например, найти 12% от числа 1 500.

Запись вычисления производится так:

Найти 12% от 1 500.

$$1\% \text{ от } 1\,500 = 1\,500 : 100 = 15;$$
$$12\% \text{ от } 1\,500 = 15 \times 12 = 180.$$

Решая этот пример, ученик рассуждает следующим образом:

«Найдём сначала 1% числа 1 500; 1% — это $\frac{1}{100}$ часть числа.

Чтобы найти от числа 1 500 одну сотую его, нужно 1 500 разделить на 100, получится 15.

Найдём дальше 12% от 1 500. Так как 1% от 1 500 составляет 15, то 12% составит число в 12 раз большее. Умножим 15 на 12, получится 180.

Итак, 12% от числа 1 500 составляет 180».

Приведём образец решения задачи на проценты.

Пусть дано решить задачу: «Сберегательная касса даёт вкладчикам 3% годового дохода. Сколько годового дохода получит вкладчик, у которого в сберкассе лежит 2 000 руб.?»

Чтобы решить эту задачу, нужно найти 3% от суммы 2 000 руб.

1. Чему равняется 1% от числа 2 000 руб.?

$$2\,000 \text{ руб.} : 100 = 20 \text{ руб.}$$

2. Чему равны 3% от числа 2 000 руб.?

$$20 \text{ руб.} \times 3 = 60 \text{ руб.}$$

Ответ: вкладчик получает за год 60 руб. дохода.

Решая задачи, нужно показать учащимся, что вычисление процентов имеет большое практическое применение: проценты применяются при денежных расчётах в сберкассах, при займах; в сельском хозяйстве при определении всхожести семян; в школе — при определении посещаемости учащихся; на фабриках и заводах — при учёте выполнения планов, при учёте продукции и т. д.

На эти жизненные темы и нужно решать задачи.

Замена процентов долями единицы. Область применения процентов в начальной школе можно значительно расширить, если научить детей выражать число процентов в долях единицы. Замена процента долями единицы упрощает и облегчает вычисления, и это уменье нужно дать учащимся начальной школы.

На квадрате со стороной 10 *см*, разделённом на клетки, легко показать, что

$$10\% = \frac{1}{10};\ 50\% = \frac{1}{2};$$
$$20\% = \frac{1}{5};\ 75\% = \frac{3}{4};$$
$$25\% = \frac{1}{4};\ 100\% = 1.$$

К замене процентов долями единицы можно подвести учащихся и через сокращение дробей:

25% — это $\frac{1}{4}$, потому что $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$; или 50% составляют $\frac{1}{2}$, потому что $50\% = \frac{50}{100}$; сокращая дробь $\frac{50}{100}$ на 50, получим $\frac{1}{2}$.

На решении примеров надо показать, что замена числа процентов долями единицы действительно упрощает вычисления, например:

Найдём 50% числа 1 800 двумя способами:

I	II
1) 1 800 : 100 = 18	$50\% = \frac{1}{2}$
2) 18 × 50 = 900	1 800 : 2 = 900

Замена процентов дробью даёт возможность вычислять проценты от таких чисел, которые не состоят из круглых сотен.

Решим задачу: «В школе 420 учащихся. 20% этого числа составляют отличники. Сколько отличников в школе?»

Решение:

$$20\% = \frac{1}{5}.$$

Найдём $\frac{1}{5}$ числа 420:

420 отл. : 5 = 84 отл.

О т в е т: 84 отличника.

ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ.

Математика, по выражению Энгельса, есть наука о количественных соотношениях и пространственных формах действительного мира. Количественные соотношения между величинами рассматриваются в арифметике; пространственные формы — в геометрии. И то и другое составляет необходимую составную часть элементарного математического образования.

Естественно, что вначале предметом изучения является число — то основное орудие, при помощи которого математика изучает и устанавливает к о л и ч е с т в е н н ы е соотношения.

В первых трёх классах дети обучаются арифметике: здесь они усваивают понятие числа и действия над ним. Попутно они развивают несколько и свои пространственные представления. Так, знакомясь с сантиметром, метром и километром, пользуясь ими для измерения различных расстояний и размеров различных предметов и вещей, они уточняют свои представления о р а с с т о я н и я х, о п р о т я ж ё н н о с т и. Пользуясь постоянно квадратиками, треугольниками и кружочками как дидактическим материалом, имея дело с прямоугольниками, на которых иллюстрируются многие арифметические понятия, учащиеся воспринимают конкретную, пока ещё п р е д м е т н у ю форму, из которой потом получится абстрактное понятие геометрической формы. Однако эти понятия в младших классах не выделены в самостоятельный раздел и не обособлены от арифметики, а, наоборот, тесно слиты с ней. Геометрический материал выделен в самостоятельный раздел в III и IV классе.

Обучение детей начаткам геометрии в начальной школе преследует две

главные цели: 1) развитие у детей пространственных представлений и 2) вооружение детей практическими навыками по измерению отрезков, площадей, объёмов.

Пространственные представления — сложные представления. Восприятие пространства включает в себя восприятие расстояния, на котором предметы расположены от нас и друг от друга, направления, в котором они находятся, величины и формы предметов.

Предметы, находясь один вне другого, располагаются в том или ином направлении, на том или ином расстоянии друг от друга. По мере того как в восприятии ребёнка отражаются положение, направление, расстояние, величина и форма предметов, у него формируется подлинное восприятие пространства. Такое восприятие пространства, отражающее соотношение вещей в реальном пространстве, получается в результате значительного развития.

В восприятии пространственных свойств вещей известную роль играют осязательные и мышечные ощущения. Но главное, на основе чего ребёнок учится ориентироваться в пространстве, — это зрительные ощущения, соединённые с жизненным опытом и практической деятельностью самого ребёнка.

Сталкиваясь с вещами и предметами различной величины и формы, обозревая и осязая их, играя с ними, создавая их собственными руками, наблюдая их относительное расположение и перемещая их по своему желанию, постоянно передвигаясь с места на место, отмеривая шагами и другими единицами измерения большие и малые расстояния, ребёнок постепенно овладевает пространством, познаёт его и совершенствует свои пространственные представления.

В IV класс ученик приходит с значительным запасом пространственных представлений, что является благоприятной предпосылкой для успешного прохождения курса наглядной и практической геометрии в этом классе.

Задача учителя заключается в том, чтобы дать учащемуся зрительные геометрические образы прямой и её отрезка, углов, фигур прямоугольника и квадрата, тел — куба и прямоугольного параллелепипеда, и на основе этих образов дать понятие о некоторых свойствах этих фигур и тел.

Вся эта работа должна подвести к уменью измерить и вычислить площадь, имеющую форму прямоугольника и к уменью измерить и вычислить объём тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда.

Из задач вытекает и метод обучения наглядной геометрии. Всё обучение от начала до конца должно быть наглядным, конкретно-предметным, зрительно-осязательным.

Наглядное обучение должно сопровождаться опытами и практическими работами самих учащихся. Учащийся должен воспринимать и изучать не только готовые зрительные образы, но и создавать, воспроизводить изучаемые геометрические формы, используя в этих целях различные средства: черчение по угольнику и линейке, вырезывание и наклеивание различных геометрических фигур, вырезывание развёрток и склеивание тел, образование фигур на подвижных моделях — получение того или иного геометрического образа путём перегибания листка бумаги.

Процесс обучения на уроке должен развёртываться в плане строгой индукции: ученикам даются отдельные факты, частные случаи для наблюдения, сравнения, анализа; на основе наблюдений и результатов сравнения делаются выводы, обобщения; эти выводы используются для решения задач.

Строя всю работу на строгом соблюдении принципа наглядности, на зрительных геометрических образах, надо в то же время всемерно помогать ученикам абстрагировать формы, абстрагировать геометрические свойства тел и фигур. Это достигается тем, что ученикам даётся один и тот же образ на различных предметах из различного материала, что учеников ставят перед необходимостью находить изучаемые формы в окружающей обстановке; выводы и обобщения делаются на основе рассмотрения достаточно большого количества отдельных примеров и фактов.

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ И ЕЁ ОТРЕЗКИ.

Представление о прямой линии у учащихся уже есть, теперь надо сделать это представление более ясным и точным. Ученику сначала даются графические образы прямой: 1) черта, проведённая вдоль ребра линейки, есть прямая линия; 2) натянутая нить изображает прямую линию; 3) если перегнуть листок бумаги, слегка нажимая пальцем, и затем расправить его, то на листке останется след в виде прямой линии.

Прямую линию можно продолжить в обе стороны на какое угодно расстояние. Та же прямая, которая ограничена двумя точками, называется о т р е з к о м п р я м о й. Отрезки прямой обозначаются двумя буквами, поставленными на концах, например отрезок *АБ*. *А* ———————————— *Б*

Столярам и плотникам часто приходится проводить длинные отрезки прямых. Они это делают с помощью шнура. Шнур натирают мелом и укрепляют между двумя концами доски так, чтобы он был натянут. Затем приподнимают шнур за середину и опускают. Шнур ударяется о доску и «отбивает» на ней мелом прямую линию.

У п р а ж н е н и я. 1) Поставить 4 точки и обозначить их буквами. 2) Провести на бумаге при помощи линейки и тонко очинённого карандаша 3 отрезка прямых в различных направлениях (сверху вниз, слева направо, наклонный), первый в 5 *см*, второй в 4 *см*, третий в 7 *см*. 3) Измерить длину данных отрезков. 4) Изготовить линейку из бумаги и начертить при помощи неё несколько прямых.

УГЛЫ.

Чтобы дать ученикам понятие об угле, надо показать им различные виды углов. Сначала надо показать углы на предметах. С этой целью в класс приносится модель прямоугольника, квадрата, треугольника. Эти фигуры в общем знакомы ученикам как дидактический материал. Показывая эти предметы, учитель обращает внимание учеников на то, что в каждом из них есть с т о р о н ы (отрезки) и у г л ы.

Когда две стороны прямоугольника или треугольника сходятся, то они образуют у г о л. Показываются углы на различных предметах классной обстановки. Углы бывают разные по виду и по величине, например углы в прямоугольном треугольнике.

После этого даётся более подробное знакомство с углами на модели подвижного угла, составленного из двух картонных полосок, скреплённых при помощи кнопки у вершины. Стороны этой модели могут свободно сдвигаться и раздвигаться.

Линии, образующие угол, называются с т о р о н а м и угла.

Точка, из которой выходят две прямые линии, называется в е р ш и н о й угла. Учащиеся показывают стороны и вершины тех углов, которые они наблюдают.

Далее даются образы п р я м о г о, о с т р о г о и т у п о г о углов. Такие углы, которые мы наблюдаем в прямоугольнике, называют прямыми углами. Мы здесь не даём определения прямого угла (оно пока ещё недоступно учащимся), а ограничиваемся тем, что даём образ прямого угла. Прямой угол показывается на модели подвижного угла. Ученики находят прямые углы в окружающей обстановке. Ученикам даётся задание составить из палочек прямой угол. Даётся задание сложить кусок бумаги вчетверо и затем развернуть его,— получатся около одной вершины четыре прямых угла.

Берутся прямые углы из кусков бумаги различной величины, накладываются один на другой, при наложении они совпадают. Отсюда делается вывод, что прямые углы все р а в н ы м е ж д у с о б о й. Стороны у этих углов разные: у одних больше, у других меньше, но величина угла одинакова. Учащиеся склонны думать вначале, что чем больше стороны, тем больше и самый угол. Но на примере равенства прямых углов, независимо от длины их сторон, они убеждаются, что это не так.

На модели подвижного угла учитель показывает, что при сближении

сторон угол уменьшается, и, наоборот, раздвигая стороны, мы увеличиваем угол. Угол, меньший прямого,— острый угол; угол, больший прямого,— тупой угол.

Упражнения. 1) Начертить два прямых угла в разном положении с помощью угольника. 2) Начертить прямой угол на клетчатой бумаге без помощи угольника, пользуясь только линейкой и карандашом. 3) Начертить несколько острых и тупых углов разной величины. 4) Сделать угольник из бумаги (для этого сложить листок бумаги пополам, а потом в согнутом виде ещё раз пополам так, чтобы одна половина сгиба совпала с другой,— получится прямой угол — угольник. Им можно пользоваться для черчения прямых углов). 5) Начертить пару прямых линий, пересекающихся под прямым углом (подсчитать, сколько прямых углов образует каждая такая пара).

ПРЯМОУГОЛЬНИК.

Цель изучения прямоугольника — создать у учащихся отчётливый конкретный образ этой фигуры и познакомить детей с её основными свойствами.

Покажем ученикам несколько прямоугольников: лист бумаги, грань прямоугольного параллелепипеда, прямоугольник, начерченный на классной доске. Все эти фигуры называются прямоугольниками. У каждого прямоугольника 4 стороны. Эти стороны образуют 4 прямых угла. Противоположные стороны прямоугольника попарно равны между собой; убедимся в этом путём измерения сторон начерченного прямоугольника.

Найдём и покажем эти фигуры в окружающей классной обстановке.

Далее научим детей вычерчивать прямоугольник сначала на клетчатой бумаге — по клеткам, а затем на неграфлёной бумаге.

Построим на классной доске прямоугольник со сторонами 5 *дм* и 3 *дм*. Для этого проведём прямую и на ней отмерим отрезок длиной в 5 *дм*. У концов отрезка с помощью чертёжного треугольника построим два прямых угла. Отмерим на сторонах этих углов по 3 *дм*. Соединим крайние точки этих сторон прямой линией.

Упражнение. Начертить прямоугольник, у которого длина 6 *см*, а ширина 4 *см*.

КВАДРАТ.

Ознакомление с квадратом идёт по тому же плану, как и ознакомление с прямоугольником. Ученикам даётся несколько изображений квадрата: грань куба, бумажный квадрат, модель квадрата. Ученики показывают стороны квадрата, углы и вершины его. Устанавливается, что у квадрата 4 стороны и все они равны. Эти стороны образуют четыре прямых угла.

В заключение прямоугольник и квадрат сравниваются, отмечается их сходство и различие.

Сходство. У квадрата и прямоугольника по 4 стороны, по 4 угла, углы прямые, противоположные стороны равны.

Различие. У квадрата все четыре стороны равны. У прямоугольника только противоположные стороны равны.

Упражнения. 1) Начертить квадраты со стороной в 1 *см*, в 4 *см*, в 1 *дм*. 2) Начертить в клетчатой тетради квадраты в одну клеточку («квадратик»), в 4 клеточки, в 9 клеточек. 3) Назвать квадраты в окружающей обстановке.

Вычисление суммы сторон прямоугольника (периметра). Выставив перед классом прямоугольник из картона или фанеры, учитель предлагает задачу: «Найти длину всех вместе взятых сторон прямоугольника».

Один ученик измеряет одну за другой стороны прямоугольника, другой записывает результаты измерения. Допустим, что размеры сторон получились следующие: 40 *см*, 25 *см*, 40 *см*, 25 *см*.

Чтобы найти длину всех вместе взятых сторон прямоугольника, нужно полученные числа сложить:

$$40\ см + 25\ см + 40\ см + 25\ см = 130\ см = 1\ м\ 30\ см.$$

Когда сумма сторон найдена, следует поставить вопрос, как иначе можно вычислить эту сумму. Так как противоположные стороны у прямоугольника равны, то, измерив его длину и ширину, нужно полученные числа удвоить. Сложив оба произведения, получим сумму всех сторон прямоугольника.

Запись будет иметь следующий вид:

1) 40 *см* $\times$ 2 = 80 *см*; 2) 25 *см* $\times$ 2 = 50 *см*; 3) 80 *см* + 50 *см* = 130 *см* = = 1 *м* 30 *см*.

Чтобы дать яркий зрительный образ этой суммы и предупредить нередко наблюдающееся у детей смешивание вычисления периметра с вычислением площади прямоугольника, можно, дав чертёж прямоугольника, вычисление суммы его сторон провести так, как это сделано на чертеже, где периметр выпрямлен, стороны прямоугольника пронумерованы и отложены на одной прямой (рис. 77).

Упражнения. 1) Раздать каждому из учеников заранее приготовленные прямоугольники и предложить им найти сумму всех сторон прямоугольника. Учитель пронумеровывает каждый прямоугольник и длину сторон его записывает у себя, чтобы можно было быстро проверять ответы учеников.

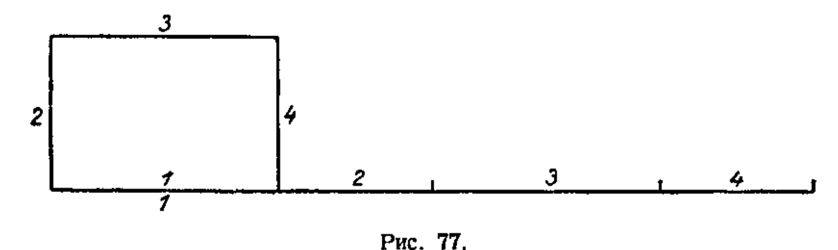


Рис. 77.

2) Измерить периметр пола класса. 3) Решить задачи: а) «Комната длиной в 7 *м* и шириной в 6 *м* оклеивается обоями. Сколько метров бордюра нужно купить для этой комнаты?» б) «Картину длиной в 75 *см* и шириной в 60 *см* нужно окантовать красной полоской. Сколько сантиметров полоски нужно иметь для окантовки картины?» (указать учащимся, что по длине или по ширине картины полоска должна быть длиннее данных в задаче размеров на 10 *см*). «Сад имеет форму квадрата со стороной 60 *м*. Он обнесён со всех сторон забором. Как велика длина всего забора». г) Решение задач по задачнику.

ПОНЯТИЕ О ПЛОЩАДИ.

В начальной школе понятие о площади нужно рассматривать как понятие величины поверхности фигуры, выраженной числом.

Каждый предмет имеет свою поверхность. Поверхность предмета — это его граница, это то, что лежит поверх, как бы снаружи. По поверхности тела можно провести рукой; поверхность можно покрасить, оклеить бумагой и т. д.

Поверхность каждого предмета имеет свой размер, свою величину. Эту величину можно измерить, вычислить; словом, величину поверхности можно выразить числом.

Величина поверхности фигуры, выраженная числом, есть площадь этой фигуры.

Так, величину поверхности классной доски, ограниченной прямыми линиями (краями), называют площадью классной доски; величину поверхности пола в классе называют площадью этого пола; величину прямоугольника, ограниченного прямыми линиями, называют площадью этого прямоугольника и т. д.

Площади могут быть разными по величине. Например, площадь переплёта книги во много раз меньше площади классной доски, а площадь любой стены нашего класса больше площади доски. Наконец, могут быть и рав-

ные площади; например, площади правой и левой стен нашего класса; площади передней и задней стенок ящика, площади одинаковых по длине и ширине прямоугольников.

По величине площади судят о величине комнат, о величине огородов и засеянных полей, о величине озёр и морей, о величине городов и районов и целых стран.

А о величине самих площадей судят по количеству квадратов, которые на них умещаются. Если на одной площади можно поместить больше одинаковых квадратов, чем на другой, то первая площадь больше второй, и наоборот. Если на одной какой-либо площади и на другой площади помещается равное число одинаковых квадратов, то площади считаются одинаковыми по величине, хотя бы они имели и разную форму.

Возьмём два прямоугольника и сравним их площади. (Учитель берёт один картонный прямоугольник размером 3 *дм* × 4 *дм*, другой — размером 2 *дм* × 6 *дм*.) Учитель накрывает сначала первый, а потом второй прямоугольник заранее приготовленный на прозрачной бумаге сеткой квадратов (квадратными дециметрами). Ученики подсчитывают число квадратов, покрывших прямоугольники, и устанавливают, что как на одном, так и на другом прямоугольнике уложилось ровно 12 квадратов.

«Значит,— говорит учитель,— эти прямоугольники имеют одинаковую площадь».

Итак, площадью данной фигуры называется то число квадратных единиц, которое укладывается в ней.

В таком направлении и с таким, примерно, содержанием проводится первая беседа учителя, в которой он подводит учащихся к пониманию термина «площади фигуры». Беседа должна носить конкретный характер и сопровождаться показом и рассмотрением поверхностей и площадей фигур, предметов, их сравнением.

Знакомство с квадратными мерами.

Для измерения площади служат особые меры — меры площади, или квадратные меры. Чаще всего используются три квадратные меры: квадратный сантиметр, квадратный дециметр и квадратный метр. Каждая из этих мер показывается ученикам в натуральную величину. Измеряются их стороны. Даётся определение каждой квадратной меры: «Квадратным сантиметром называется квадрат, сторона которого равна 1 *см*». «Квадратным дециметром называется квадрат, сторона которого равна 1 *дм*». «Квадратным метром называется квадрат, сторона которого равна 1 *м*».

Для закрепления зрительного образа каждой из этих мер учащимся предлагается начертить и заштриховать в клетчатой тетради квадратный сантиметр и квадратный дециметр. С той же целью квадратные меры изготовляются из картона и вывешиваются в классе. В заключение производится сравнение одноимённых квадратных и линейных мер — квадратного и линейного сантиметра, квадратного и линейного дециметра, квадратного и линейного метра.

Нужно добиться ясного понимания учащимися различия этих мер. Этой цели могут служить чертежи: а) квадрата со сторонами, равными 1 *см*, и рядом отрезка длиной в 1 *см*; б) квадрата со сторонами 1 *дм* и рядом отрезка длиной в 1 *дм*. Отрезки — линейные меры — служат для измерения линий, квадратные меры служат для измерения площадей.

Измерение площади прямоугольника.

Чтобы ученики могли вполне сознательно овладеть навыком вычисления площадей, нужно при первоначальном знакомстве с этим навыком провести их последовательно через три этапа: 1) непосредственное измерение данной площади путём укладывания на ней соответствующей квадратной меры; 2) измерение основания и высоты прямоугольника и деление его на квадратные клетки

(деление сначала фактическое, а потом мысленное); 3) вывод правила и вычисление площади по правилу.

Первый этап. Выставив прямоугольник, вырезанный из фанеры или из толстого картона, размером 4 *дм* × 3 *дм*, предложим задачу: «Измерить площадь этого прямоугольника». Выбираем подходящую для этого меру. Останавливаемся на квадратном дециметре. Заполняем постепенно квадратными дециметрами всю площадь прямоугольника и подсчитываем количество уложенных квадратных дециметров. Оказалось 12. Значит, площадь прямоугольника равна 12 квадратным дециметрам.

Ставим вопрос: как по этому способу измерить площадь класса? Нужно взять квадратный метр и затем укладывать его на полу, отмечая его место на полу точками, чтобы потом можно было подсчитать, сколько раз он уложился на площади пола. Нужно начать это накладывание. Выясняется всё неудобство проведения этой операции. Встаёт вопрос, нельзя ли иначе измерять площадь — без укладывания квадратной меры. Возвращаемся к нашему прямоугольнику.

Второй этап. Измерим линейным дециметром длину и ширину прямоугольника. Получим соответственно 4 *дм* и 3 *дм*. Делим прямоугольник на квадраты, стороны которого равны 1 *дм*. Подсчитываем число полученных квадратов, ведя подсчёт в таком порядке: так как длина прямоугольника 4 *дм*, то по его длине уложилось 4 квадрата, величиной каждый

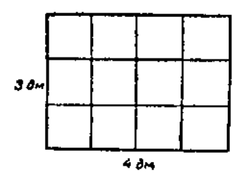


Рис 78.

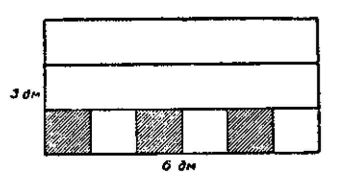


Рис. 79.

в 1 *кв. дм*. Из этих квадратов получилась полоса длиной в 4 *дм* и шириной в 1 *дм*. Площадь её 4 *кв. дм*. Так как ширина прямоугольника 3 *дм*, то таких полос получилось 3. Чтобы узнать всю площадь прямоугольника, надо 4 *кв. дм* умножить на 3. Получится 12 *кв. дм*. Итак, площадь нашего прямоугольника равна 12 *кв. дм*. (рис. 78). Здесь мы обошлись без накладывания квадратного дециметра.

Попробуем ещё скорее измерять площадь прямоугольника, деля его площадь на квадраты только мысленно. Вычислим площадь нового прямоугольника. (Рис. 79). Для этого измерим его длину и ширину. Пусть длина составляет 6 *дм*, а ширина 3 *дм*. Сколько квадратных дециметров уложится на площади этого прямоугольника? Подсчитаем мысленно, рассуждая так: если длина прямоугольника равна 6 *дм*, то по его длине 1 *кв. дм* уложится 6 раз и получится полоса в 6 *кв. дм*. Так как ширина прямоугольника составляет 3 *дм*, то таких полос получится 3, в каждой по 6 *кв. дм*, а всего уложится 18 *кв. дм*.

$$6 \text{ кв. дм} \times 3 = 18 \text{ кв. дм}.$$

Площадь нашего прямоугольника составляет 18 *кв. дм*.

Упражнения для самостоятельной работы. 1) Начертить в тетради по клеткам прямоугольник длиной в 5 *см* и шириной в 4 *см*. Измерить его площадь путём деления прямоугольника на квадраты. 2) Начертить прямоугольник длиной в 4 *см* и шириной в 2 *см* и измерить его площадь без деления на квадраты (с помощью рассуждения, опирающегося на образ прямоугольника, разделённого на квадратные единицы).

Третий этап. Все предыдущие упражнения дали материал, вполне достаточный для того, чтобы дети могли подметить закономерность в нахождении площади прямоугольника по данной его длине и ширине. Связь между

длиной, шириной и площадью выступает с большой очевидностью, остаётся её оформить, выразив словами. Для этого учитель ещё раз фиксирует внимание детей на результатах вычисления и спрашивает, как они получились, от перемножения каких чисел. Ученики без затруднения ответят — от перемножения чисел, выражающих длину и ширину прямоугольника. Отсюда вытекает правило вычисления площади прямоугольника, которое формулируется так: «Чтобы найти площадь прямоугольника, нужно измерить его длину и ширину одной и той же мерой и полученные числа перемножить».

В такой формулировке правило усваивается наизусть и на основе его решается ряд задач и примеров. Но перейдя к решению задач по правилу, нужно время от времени предлагать учащимся воспроизводить всю схему рассуждений, опирающихся на образ прямоугольника, разделённого на квадратные единицы.

Запись вычисления площади. Решим задачу: «Класс имеет в длину 8 *м*, а в ширину 6 *м*. Чему равна площадь класса»?

При решении этой задачи может быть применена одна из следующих записей:

8 *кв. м* × 6 = 48 *кв. м*
8 × 6 = 48 (*кв. м*)
8 *м* × 6 *м* = 48 *кв. м*

Первая запись применима на том этапе изучения вопроса о вычислении площадей, когда учащиеся пользуются непосредственным измерением или находят площадь с помощью рассуждений, опирающихся на образ прямоугольника, разделённого на квадраты. На этой форме записи в начальной школе можно и остановиться.

Однако нет оснований возражать против перехода уже в начальной школе на вторую форму записи после того, как учащиеся по мере автоматизации навыка начинают вычислять площади, опираясь на соответствующее правило.

Правильна и третья запись, но она неуместна в IV классе, где учащиеся ещё незнакомы с символами размерности величин. Эта запись противоречит требованию, чтобы множитель был отвлечённым числом.

Упражнения. 1) Ученикам раздаётся набор прямоугольников и квадратов, вырезанных из плотного картона или фанеры. Ученики измеряют их стороны и затем вычисляют площади. Результаты измерения записывают в тетради. 2) Измерить и вычислить площадь класса и площадь коридора. 3) Измерить и вычислить площадь своей комнаты (задание на дом).

Вычисление площади квадрата. Квадрат отличается от прямоугольника только тем, что у него все стороны равны. Поэтому в вычислении площади квадрата ученик не встретит для себя ничего нового. Здесь действует то же правило. Нужно только подчеркнуть, что для вычисления площади квадрата достаточно иметь только одно данное, т. е. знать только одну сторону, и что здесь приходится перемножать число само на себя. Например, пусть требуется найти площадь квадрата, сторона которого равна 8 *см*. Это значит, что и длина, и ширина этой фигуры равна 8 *см*. Следовательно, площадь его будет равна произведению 8 на 8 = 64 *кв. см*.

Таблица квадратных мер составляется по следующей форме:

1 *кв. м* = 100 *кв. дм*
1 *кв. дм* = 100 *кв. см*
1 *кв. см* = 100 *кв. мм*
1 *кв. км* = 1 000 000 *кв. м*
Гектар = 10 000 *кв. м*
Ар = 100 *кв. м*

Единичные отношения между квадратными мерами (между *кв. дм* и *кв. см*, между *кв. см* и *кв. мм*) должны быть показаны наглядно, на чертежах. Для этого квадрат, сторона которого равна метру, делится на квадратные деци-

метры; квадрат, сторона которого равна 1 дециметру, делится на квадратные сантиметры и т. д.

В конце нужно сопоставить единичные отношения линейных и квадратных мер. Единичное отношение между квадратными мерами находится так: единичное отношение соответствующих линейных мер умножается само на себя.

Линейные меры:	Квадратные меры:
1 *м* = 10 *дм*	1 *кв. м* = 10 × 10 = 100 *кв. дм*
1 *дм* = 10 *см*	1 *кв. дм* = 10 × 10 = 100 *кв. см*
1 *см* = 10 *мм*	1 *кв. см* = 10 × 10 = 100 *кв. мм*

Гектар и ар нужно обязательно показать на открытой местности в их натуральную величину, чтобы у учащихся получилось точное представление об этих мерах.

Задачи на вычисление площадей. Уменье вычислять площади должно быть использовано для решения ряда практических, жизненных вопросов, с которыми встречаются и дети, и взрослые, например:

Сколько квадратных метров занимает световая площадь окон класса? Сколько саженцев можно рассадить в ящиках данных размеров, если 1 саженец занимает 25 *кв. см*? Какая площадь приходится на одного человека в нашем классе? в нашей квартире? Сколько надо обоев, чтобы оклеить комнату данных размеров? Сколько будет стоить побелка стен в комнате данных размеров? Сколько будет стоить окраска пола в комнате данных размеров? Какую площадь занимает наша школа? Вычислить площадь нашей усадьбы и т. п.

С вычислением площадей связано много интересных задач, решение которых способствует развитию у детей пространственных представлений. В этом отношении выделяются задачи, в которых сочетается вычисление периметра с вычислением площади, например: «Прямоугольный участок обнесли со всех сторон забором длиной в 260 *м*. Найти площадь этого участка, если ширина его 42 *м*».

Решение таких задач полезно сопровождать вычерчиванием фигур прямоугольника с простановкой соответствующих размеров.

На решении геометрических задач можно повторить решение некоторых типовых задач, например: «Сумма сторон прямоугольного участка составляет 270 *м*. Какова площадь этого участка, если его длина вдвое больше ширины?»

Более сложным является решение таких задач, где стороны прямоугольника выражены разными мерами (например, длина 2 *м*, а ширина 6 *дм*) или составными именованными числами (длина 2 *м* 40 *см*, ширина 1 *м* 25 *см*). Такие задачи решать нужно: они в жизни встречаются чаще, чем задачи с простыми именованными числами. На прямоугольниках, вырезанных из картона, надо показать эти случаи, надо показать ученикам необходимость раздробления чисел в одинаковые меры и упражнять их в превращении квадратных мер.

Особую группу составляют те задачи, в которых требуется в ы ч и с л и т ь п л о щ а д ь п р я м о у г о л ь н о г о у ч а с т к а п о п л а н у и м а с ш т а б у.

С понятиями «план, масштаб» учащиеся ознакомились на уроках географии; здесь целесообразно провести ряд вычислительных упражнений с применением этих понятий. Возможны три разновидности таких задач:

1) Требуется определить масштаб по данным размерам в действительности и на плане. («На плане ширина прямоугольного участка изображается отрезком в 4 *см* 5 *мм*. На местности его ширина 900 *м*. По какому масштабу сделан план?») 2) Дан чертёж участка и указан масштаб. Вычислить площадь участка. 3) Комбинированное условие задачи. Учитель может заготовить несколько карточек, на которых сделаны несложные планы с масштабами. Ученик перечерчивает масштаб на полоску бумаги и, измеряя ею стороны фигуры, находит действительные их размеры, а по ним вычисляет площадь фигуры.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЁМОВ.

При изучении этой темы учащиеся впервые знакомятся с новой для них величиной — объёмом. Из величин геометрического характера они уже знают длину и площадь, теперь к ним прибавляется объём. Знание этих величин необходимо для ориентировки в жизни и для успешного изучения других учебных дисциплин — географии, естествознания, а в дальнейшем — физики и химии.

Получив понятие об объёме, учащиеся знакомятся с единицами измерения этой величины — с кубическими мерами — и приобретают навык измерения и вычисления объёма тел, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда. Если учесть, что эта форма является одной из самых распространённых в жизни, то станет очевидным огромное практическое значение этой темы.

Не менее велико и чисто образовательное значение изучения данной темы: она развивает у ребёнка пространственное представление о форме. Куб и брус — наиболее часто встречающиеся формы вещей и предметов, заполняющих пространство. Жилище человека и многие предметы его домашнего обихода, материалы и инструменты его труда — всё это имеет по преимуществу форму бруса или куба. Поэтому ознакомиться с признаками и свойствами этих двух геометрических тел — значит ознакомиться с признаками и свойствами большинства предметов, окружающих человека.

Самый процесс образования представления о форме куба и прямоугольного параллелепипеда оказывает большое влияние на развитие у ребёнка способности абстрагирования, способности отвлечённого мышления. Сосредоточивая внимание на форме, ученик отвлекается от ряда физических свойств предмета: материала, цвета, веса, величины и т. д., преодолевает привычку мыслить исключительно конкретно. Эта способность отвлечения позволяет ребёнку иными глазами смотреть на окружающий мир и видеть единство во множестве, единообразие в разнообразии. Спичечная коробка и комната, ящик и погреб, кирпич и шкаф — при всём разнообразии своих физических свойств и выполняемых функций — объединены формой, одинаковой у всех этих предметов. Понимание же общности свойств предметов помогает ребёнку познавать мир и ориентироваться в нём.

Изучение геометрического материала должно быть поставлено так, чтобы эти возможности были полностью реализованы.

КУБ.

Каждый учащийся на уроке должен иметь у себя на руках модель куба — кубик из арифметического ящика. У учителя для показа должна быть большая модель куба, на которой он показывает всему классу элементы куба и предлагает каждому ученику находить их на своих моделях куба. Показывая рукой плоскости, ограничивающие куб, учитель говорит: «Вот грани куба. Покажите грани на своём кубике. Подсчитайте, сколько граней имеет куб».

Указывая линии, где две грани сходятся, учитель говорит: «Вот рёбра куба. Ребро получается от пересечения двух граней. Ребро куба — прямая линия. Покажите рёбра на своих кубиках в определённом порядке. От пересечения каких граней получилось вот это ребро? Подсчитайте, сколько рёбер у куба».

Указывая на точки, где сходятся три ребра, учитель называет их вершинами куба, предлагает ученикам показать вершины на своих кубиках и подсчитать, сколько вершин у куба.

Особое внимание обращает учитель на г р а н и куба. Грани куба различаются так: верхняя, нижняя и боковые — передняя, задняя, правая, левая. «Покажите на своих кубиках верхнюю и нижнюю грани, переднюю и заднюю, правую и левую».

Учитель предлагает учащимся поставить модель кубика на чистую бумагу и обвести контуры нижней грани карандашом. Путём измерения сторон и проверки углов наугольником ученики устанавливают, что грань куба — к в а д р а т. Прикладывая куб к изображению на бумаге его нижней грани

другими гранями, ученики убеждаются, что все грани куба равны между собой. Учитель подчёркивает, что все грани куба — равные между собой квадраты.

Непосредственным измерением длины рёбер на моделях куба ученики убеждаются, что все рёбра куба равны между собой.

В заключение ученики в связной форме должны уметь рассказать всё, что они узнали о признаках куба: «У куба 6 граней. Все они равны между собой. Грани куба — квадраты. Грани при пересечении образуют рёбра. У куба 12 рёбер. Все рёбра куба равны между собой. Где сходятся 3 ребра, образуется вершина. У куба 8 вершин».

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД.

Это геометрическое тело изучается по тому же плану, по какому изучался куб. Каждый учащийся в качестве модели параллелепипеда должен иметь у себя спичечную коробку. У параллелепипеда 6 граней, все прямоугольники; две из них могут быть квадратами. Противоположные грани равны. То место, где две грани сходятся, называется, как и у куба, ребром. Рёбер у параллелепипеда 12. Вершин 8.

При изучении параллелепипеда учащимся показываются 3 его измерения — длина, ширина и высота; показывается площадь основания и высота. Очень важно, чтобы учащиеся хорошо научились различать в параллелепипеде длину, ширину и высоту (рис. 81).

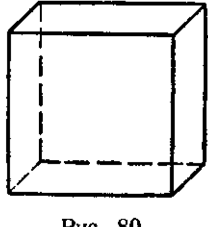


Рис. 80

После изучения куба и прямоугольного параллелепипеда порознь эти два тела сравниваются между собой, выясняется их сходство и различие.

Сходство. У куба и параллелепипеда по 6 граней, по 12 рёбер и 8 вершин; противоположные грани равны; у них 3 измерения — длина, ширина и высота.

Различие. У куба все грани равны и все они — квадраты. У параллелепипеда все грани — прямоугольники, две из них могут быть квадратами. У куба все три измерения (рёбра) равны; у параллелепипеда они разные.

К развёртке прямоугольного параллелепипеда удобно подойти, разрезая спичечную коробку. По развёртке разрезанной спичечной коробки дети учатся чертить развёртки заданных брусков небольшого размера. Из развёрток изготовляются коробки, которые являются моделями параллелепипеда.

Развитию пространственного представления способствует черчение куба и прямоугольного параллелепипеда. Учитель показывает ученикам приём черчения этих двух тел: для этого он берёт их модели и, указывая каждую грань, изображает её на чертеже. Ученики делают аналогичные чертежи в своих тетрадях.

Чертёж делается в определённом масштабе. Учитель поясняет все условности чертежа: линии, уходящие вдаль, чертятся из угла в угол клетки, изображаются меньшими по сравнению с общим масштабом чертежа, те линии, которые не видны, изображаются пунктиром; (рис. 80).

Измерение поверхности куба и прямоугольного параллелепипеда. Этот вопрос не является обязательным для изучения, однако имеет большое практическое значение, и обходить его не следует. С вычислением поверхности прямоугольного параллелепипеда приходится сталкиваться, когда решаются вопросы о побелке помещения, об оклейке комнаты, об оштукатуривании стен, о шлифовке поверхности куска того или иного металла и т. д. На решении этих-то задач и следует научить учеников вычислять поверхность параллелепипеда по данным его размерам. Первые упражнения надо проделать на наглядных пособиях.

Возьмём какой-либо брус и вычислим его поверхность. Для этого измеряем длину, ширину и высоту бруса и записываем результаты на доске. Пусть

будет длина 15 *см*, ширина 10 *см*, высота 6 *см*. Выясняем, что поверхность бруса складывается из площадей 6 граней и что для вычисления поверхности надо вычислить площади всех граней и их сложить. Вычисляем площади и складываем, получается: 150 *кв. см* + 90 *кв. см* + 60 *кв. см* + 150 *кв. см* + + 90 *кв. см* + 60 *кв. см* = 600 *кв. см*.

Тут же выясняем, что вычисление может быть произведено короче и скорее. У параллелепипеда противоположные грани равны. Поэтому потребуется вычисление площади только трёх граней: нижней, передней и одной боковой. Затем каждую площадь нужно удвоить и полученные три произведения сложить (или короче: найденные площади сложить и их сумму удвоить).

Первой конкретной задачей на вычисление поверхности должна быть задача на вычисление поверхности четырёх стен класса; затем четырёх стен пола и потолка класса; далее — вычисление поверхности класса за вычетом площади окон и дверей.

Этими конкретными задачами можно и ограничиться в IV классе, дав учащимся на дом произвести аналогичные вычисления применительно к своей комнате.

ПОНЯТИЕ ОБ ОБЪЁМЕ. КУБИЧЕСКИЕ МЕРЫ.

Объёмом тела, или вместимостью его, называется величина той части пространства, которую занимает тело. Таково обычное элементарное определение объёма. Но в начальной школе цель работы заключается не в заучивании определения, а в том, чтобы на наглядных примерах уяснить смысл слова «объём», показать его как величину, показать потребность в измерении объёма и необходимость особых мер объёма.

Для ознакомления с термином «объём» учитель может принести в класс три различные по величине коробки или три ящика небольшого размера, имеющие форму прямоугольного параллелепипеда. В одну из коробок (большую) насыпается доверху песок. Затем этот песок пересыпается в меньшую коробку; оказывается, весь песок в меньшей коробке не помещается. Почему? «Потому, что эта коробка меньше, а та больше»,— отвечают дети. «Да,— добавляет учитель: — о б ъ ё м первой коробки больше объёма второй коробки». После этого, снова наполнив доверху первую коробку, учитель пересыпает песок в такую же по о б ъ ё м у третью коробку. «Что можно сказать об этих двух коробках?» — спрашивает учитель. «Эти коробки одинаковые, равные»,— отвечают дети. «Да, о б ъ ё м первой и третьей коробок одинаков,— уточняет учитель ответ учеников.— Каждая коробка имеет свой объём. Шкаф имеет свой объём. Комната (класс) имеет свой объём. То же ящик стола и т. д. Что больше по объёму — комната или шкаф? Шкаф или ящик стола? Назовите в классе такой предмет, который имеет самый малый объём, самый большой объём. Назовите предметы, которые имеют одинаковые объёмы».

От такого приблизительного (на глаз) сравнения объёмов учитель переходит к более точному. Для этого он берёт из арифметического ящика два бруска — один больший, другой меньший. Приставив к первому бруску кубики, находим, что его объём примерно равен 4 кубикам, а объём другого — 2 кубикам.

Учитель сообщает, что в жизни часто приходится измерять объёмы: поместится ли собранное сено в сарае? сколько картофеля поместится в погребе? сколько силоса можно заготовить в силосной яме? Чтобы ответить на эти вопросы, надо уметь измерять объёмы, а чтобы измерять, нужно выбрать м е р ы объёма. Объёмы измеряются объёмами. Учитель называет и показывает единицы для измерения объёмов — кубический сантиметр, кубический дециметр и кубический метр. Кубический сантиметр — это кубик, рёбра которого равны 1 *см*. Куб, рёбра которого равны 1 *дм*, называется кубическим дециметром. Куб, рёбра которого равны 1 *м*, называется кубическим метром. Модели единиц измерения показываются учащимся, чтобы образы этих единиц прочно запечатлелись в их представлении.

ИЗМЕРЕНИЕ ОБЪЁМА.

Вычислению объёмов по правилу и выводу этого правила нужно предпослать ряд упражнений в прямом и непосредственном измерении объёма различными кубическими единицами измерения.

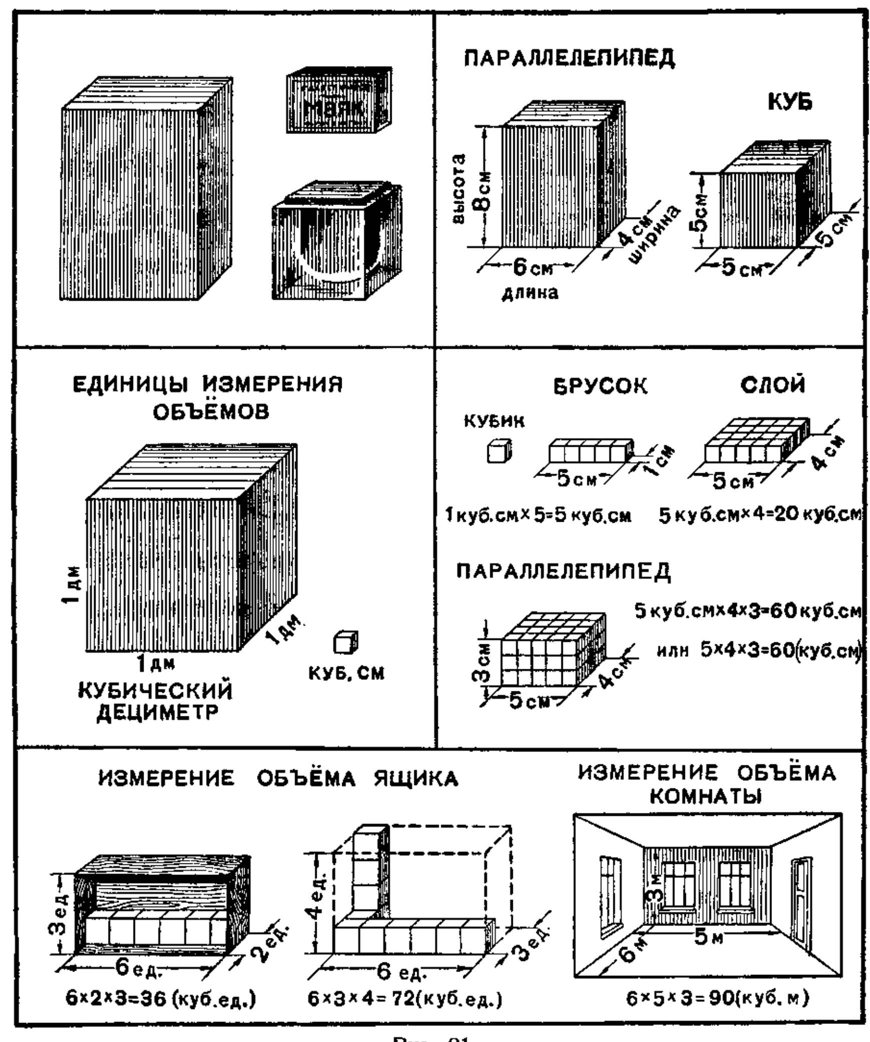


Рис. 81.

Первое упражнение: образование параллелепипедов из кубиков (рис. 81).

Возьмём 5 кубиков (5 *куб. см*) и сдвинем их. Получим брусок в 5 *куб. см.* У этого бруска длина 5 *см*, ширина и высота 1 *см*. Объём — 5 *куб. см.*

Теперь возьмём 4 таких бруска, сдвинем их вместе. Получим параллелепипед, в котором содержится 4 раза по 5 *куб. см*, т. е. 20 *куб. см.*

Говорят, что объём данного параллелепипеда равен 20 *куб. см.* У этого параллелепипеда длина 5 *см*, ширина 4 *см*, высота 1 *см*. Вычисление объёма этого параллелепипеда можно записать так: 5 *куб. см* $\times$ 4 = 20 *куб. см.*

Теперь составим из кубиков такой параллелепипед, у которого длина 5 *см*, ширина 4 *см*, а высота 3 *см*. У нас уже есть параллелепипед, у которого длина 5 *см*, ширина 4 *см*, а высота 1 *см*. Чтобы получить параллелепипед высотой в 3 *см*, нужно на этот параллелепипед (будем называть его слоем) положить ещё один такой слой и ещё второй такой же слой.

Получился требуемый параллелепипед, у которого длина 5 *см*, ширина 4 *см* и высота 3 *см*. В этом параллелепипеде 3 слоя, в каждом слое по 4 бруска, в каждом бруске по 5 *куб. см.* Сосчитаем, сколько же всего кубических сантиметров в этом параллелепипеде.

Длина бруска 5 *см*; в нём 5 *куб. см.* В слое ширина 4 *см* и брусков 4, в каждом по 5 *куб. см.* Значит, в одном слое 5 *куб. см* $\times$ 4 = 20 *куб. см.* Высота параллелепипеда 3 *см* и слоёв в нём 3. В каждом слое по 20 *куб. см.* Значит, во всём параллелепипеде 60 *куб. см.* Следовательно, объём параллелепипеда равен 60 *куб. см.* Запишем наше вычисление так:

5 *куб. см* $\times 4 \times 3 = 60$ *куб. см.*

Дадим теперь ученикам задание для самостоятельного вычисления: составить из кубиков параллелепипед, у которого длина 4 *см*, ширина 3 *см* и высота 2 *см*. Пусть далее они сделают подсчёт числа кубиков и запишут вычисление:

4 *куб. см* $\times 3 \times 2 = 24$ *куб. см.*

24 *куб. см* — это объём составленного параллелепипеда.

На таких упражнениях дети подводятся к пониманию того, что по длине можно узнать, сколько кубических единиц измерения в одном бруске, по ширине — сколько таких брусков и сколько единиц измерения в одном слое, по высоте — сколько слоёв, а по всем трём измерениям можно узнать, чему равен объём параллелепипеда.

Второе упражнение: измерение объёма путём непосредственного заполнения его кубическими единицами измерения. Возьмём ящик или коробку с открытой стенкой размерами 5 *дм* $\times$ 3 *дм* $\times$ 2 *дм*. Чему равен объём этого ящика, или сколько кубических дециметров поместится в этом ящике? Учитель укладывает на дне ящика кубические дециметры — 3 ряда по 5 *куб. дм* в каждом. Получается слой объёмом 15 *куб. дм.* Так как высота ящика 2 *дм*, то в нём поместится ещё один слой в 15 *куб. дм.* Таким образом в ящике поместится всего 30 *куб. дм.* Объём ящика равен 30 *куб. дм.* В заключение устанавливается порядок подсчёта и подчёркивается связь между длиной ящика (5 *дм*) и объёмом одного бруска (5 *куб. дм*), между шириной ящика (3 *дм*) и количеством брусков (3 бруска по 5 *куб. дм*), между высотой (2 *дм*) и количеством слоёв (2 слоя по 15 *куб. дм*). Вычисление объёма записывается так:

5 *куб. дм* $\times 3 \times 2 = 30$ *куб. дм.*

Третье упражнение: измерение объёма комнаты (класса) путём мысленного заполнения её кубами и вывод правила вычисления объёма параллелепипеда.

Измерим объём класса.

Пусть длина класса будет 8 *м*, ширина 6 *м*, высота 4 *м*. Устанавливаем, что объём класса целесообразно измерять куб. метрами. Рассуждаем так, как если бы мы мысленно заполняли комнату кубами величиной каждый в 1 куб. метр.

Так как длина класса 8 *м* то по этой длине можно уложить 8 *куб. м*, из которых составится ряд или брус в 8 *куб. м*. Ширина класса 6 *м*, поэтому на полу уложится 6 таких рядов-брусьев. Получится слой, в котором 8 *куб. м* $\times$ 6 = 48 *куб. м*. Высота класса 4 *м*, поэтому таких слоёв поместится в нём 4. В этих слоях будет 48 *куб. м* $\times$ 4 = 192 *куб. м*. Запишем вычисления, которые мы произвели:

1) 8 *куб. м* $\times$ 6 = 48 *куб. м*.
2) 48 *куб. м* $\times$ 4 = 192 *куб. м*.
или: 8 *куб. м* $\times$ 6 $\times$ 4 = 192 *куб. м*.

Правило для вычисления объёма прямоугольного параллелепипеда формулируется так: «Чтобы найти объём прямоугольного параллелепипеда, надо измерить его длину, ширину и высоту одной и той же единицей длины и полученные числа перемножить».

После этого решаются задачи, в которых объём вычисляется по правилу. Чтобы у учеников не утрачивался смысл этого правила, иногда следует ставить вопрос: почему при вычислении объёма (на основе таких-то его линейных размеров) нужно перемножить его длину, ширину и высоту?

Запись вычисления объёма. Возможны три формы записи решения вышеуказанной задачи:

1) 8 *куб. м* $\times$ 6 $\times$ 4 = 192 *куб. м*.
2) 8 $\times$ 6 $\times$ 4 = 192 (*куб. м*).
3) 8 *м* $\times$ 6 *м* $\times$ 4 *м* = 192 *куб. м*.

Первая запись применима на том этапе изучения вопроса о вычислении объёма, когда учащиеся пользуются непосредственным измерением объёма путём заполнения его кубическими единицами или вычисляют объём с помощью рассуждений, опирающихся на образ прямоугольного параллелепипеда, разделённого на кубики. На этой форме записи в начальной школе можно и остановиться.

Однако уже и в начальной школе по мере автоматизации навыка возможен переход на вторую форму записи, когда учащиеся вычисляют объёмы, опираясь на соответствующее правило[1].

Третья запись правильна, но для начальной школы она преждевременна, так как учащиеся IV класса не имеют представления о действиях над единицами размерности величин.

Таблица кубических мер. Единицы объёмов — кубический метр, кубический дециметр, кубический сантиметр — и единичные их отношения ученики должны представлять себе конкретно. Для этого ученикам показывается кубический дециметр, составленный из 1 000 *куб. см*. Подсчётом числа кубиков в одном слое и путём умножения 100 на 10 (слоёв) ученики убеждаются в том, что 1 *куб. дм* действительно равен 1 000 *куб. см*.

Таким же путём ученики приходят к выводу, что в 1 *куб. м* 1 000 *куб. дм*, в 1 *куб. см* 1 000 *куб. мм*. Таблица кубических мер имеет такой вид:

1 *куб. м* = 1 000 *куб. дм*
1 *куб. дм* = 1 000 *куб. см*
1 *куб. см* = 1 000 *куб. мм*

Полезно сопоставить меры длины и меры объёма.

Линейные меры:	Кубические меры:
1 *м* = 10 *дм*	1 *куб. м* = 10·10·10 = 1000 *куб. дм*
1 *дм* = 10 *см*	1 *куб. дм* = 10·10·10 = 1000 *куб. см*
1 *см* = 10 *мм*	1 *куб. см* = 10·10·10 = 1000 *куб. мм*

[1] Подробное обоснование этой формы записи дано в брошюре П. И. Сорокина «Опыт изучения геометрического материала в IV классе». Изд. АПН, 1950, стр. 41.

Отсюда делается вывод: «Чтобы найти единичное отношение между кубическими мерами, надо единичное отношение соответствующих линейных мер взять множителем три раза».

Упражнения и задачи на вычисление объёма.

Вначале даются упражнения, в которых требуется измерить рёбра параллелепипеда и затем вычислить его объём. Для таких задач надо иметь набор деревянных брусков, картонных коробок, фанерных ящиков, которые раздаются учащимся. При измерении числа округляются. Если при измерении сантиметрами получится остаток, меньший половины сантиметра, то этот остаток отбрасывается; если же он больше половины сантиметра, то он считается за целый сантиметр.

После этого следуют упражнения в вычислении объёма комнаты (класса), коридора, шкафа, печи. Измерения ведутся метрами и дециметрами.

Дальше решаются устные и письменные задачи по трём данным измерениям. Задачи берутся из задачника и составляются самим учителем. Чтобы создать прочный навык вычисления объёма, надо побольше решать простых, ничем не усложнённых устных задач, где требуется вычислить объём по данной длине, ширине и высоте, требуя от учащихся не только правильности, но и известной быстроты в вычислениях.

Приведём образец решения сложной задачи на вычисление объёма с письменным планом.

Задача: «Стеклянная чернильница имеет форму куба, рёбра которого 6 *см*. Выемка для чернил имеет форму прямоугольного параллелепипеда, длина и ширина которого 3 *см*, глубина 4 *см*. Вычислить вес чернильницы, зная, что 10 *куб. см* стекла весят 26 *г*».

План и решение.

1) Объём чернильницы:

6 *куб. см* × 6 × 6 = 216 *куб. см*.

2) Объём выемки для чернил:

3 *куб. см* × 3 × 4 = 36 *куб. см*.

3) Объём, занимаемый стеклом:

216 *куб. см* — 36 *куб. см* = 180 *куб. см*.

4) Сколько раз 10 *куб. см* содержится в 180 *куб. см*?

180 *куб. см* : 10 *куб. см* = 18.

5) Вес чернильницы: 26 *г* × 18 = 468 *г*.

Ответ: 468 *г*.

Примерное содержание контрольной работы.

Основным в этой работе должна быть задача, в которой по данным трём измерениям требуется найти объём параллелепипеда и по данному ребру требуется найти объём куба. Кроме того, надо проверить знание таблицы кубических мер. Таким образом, контрольная работа может иметь примерно следующее содержание:

1. Написать таблицу кубических мер.
2. Ребро куба равно 5 *см*. Чему равен объём куба?
3. Вычислить объём параллелепипеда, у которого длина 6 *дм* 8 *см*, ширина 4 *дм*, высота 3 *дм*.
4. Решить задачу: «Погреб имеет в длину 4 *м*, в ширину 3 *м* и в высоту 2 *м*. Сколько подвод потребуется для того, чтобы набить погреб льдом, если на каждые 5 подвод грузят по 3 *куб. м* льда?»

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РАБОТЫ НА МЕСТНОСТИ.

Классные работы по геометрии должны быть дополнены геометрическими работами на местности, главным образом измерительными работами, которые явятся практическим применением знаний, полученных на уроках.

Это вооружит детей ценными практическими навыками и будет способствовать развитию у них пространственных представлений. Именно на местности ребёнок учится по настоящему ориентироваться в пространстве. Пока ученик находится в классе, развитие у него пространственных представлений протекает в обстановке небольшого замкнутого пространства, где он встречается только с небольшими расстояниями, с предметами малой протяжённости. Однообразие обстановки, её статичность ограничивают у ученика круг ориентировочных навыков. Когда же ученик выходит на открытую местность, он сразу сталкивается с пространством большого масштаба, с большими расстояниями, с предметами большого протяжения, с большими площадями, с большой динамикой и разнообразием в относительном расположении предметов. Разнообразие и динамичность обстановки требуют от ученика образования новых ориентировочных навыков и приспособления к новой среде и новым условиям работы. Под воздействием этой новой обстановки происходит усиленное развитие у ученика пространственных представлений.

Что же требуется программой в области измерительных работ и какими способами должны проводиться эти работы?

1. **Провешивание линий** и измерение их. Это первая работа, которая выполняется учащимися на местности. Предварительно в классе нужно объяснить ученикам, для чего необходимо провешивать линии. Объяснить это можно так.

«Когда мы измеряли класс — его длину и ширину, то мы шли по прямой линии вдоль стенок. На местности тоже приходится при съёмке плана измерять прямые линии, но там стенок нет, там прямую надо обозначить вешками.

Если вешек не поставить, то измерение будет очень неточным; двигаясь с мерной верёвкой на глаз, без вешек мы будем двигаться не по прямой, а по ломаной линии, и получится у нас неверное расстояние».

Дальше надо познакомить учащихся с тем, как ставить вешки, чтобы провешить прямую от какой-нибудь начальной вешки *А* по направлению на предмет *Б*.

Один из учеников должен стать с вешкой в руках где-нибудь между *А* и *Б* около точки *В*, а другой, имея в руках флажок, становится у точки *А* и, смотря на *А* так, чтобы вешка *А* закрывала вешку *Б*, флажком подаёт сигналы первому — передвинуться влево или вправо до тех пор, пока вешка *В*, как и вешка *Б*, не будет закрыта вешкой *А*. Чтобы вешка *В* была поставлена на прямой *АБ* возможно более точно, ученик с флажком должен стоять не у самой вешки *А*, а на некотором от неё расстоянии.

Объяснение в классе провешивания прямых сопровождается демонстрацией — установкой вешек на учительском столе или на партах, вдоль прохода между ними. Если вешек нет, то можно предложить учащимся, сидящим в одном ряду, поднять вверх левую руку с карандашом и установить их на одной прямой, как вешки.

После этого делается первый выход в поле, где учащиеся провешивают прямые линии и измеряют их.

Перед выходом в поле учитель должен заготовить: 1) флажок, употребляемый при провешивании; 2) 5 вешек высотой 1,5 *м*; 3) 15—20 небольших (около 40 *см*) колышков для втыкания в землю; 4) мерную 10-метровую верёвку или рулетку.

Ученики разбиваются на звенья по 5—6 человек в каждом звене.

Учитель сообщает учащимся правила, которые должны ими соблюдаться во время проведения практических работ на местности: а) ученики должны поддерживать дисциплину; б) каждый должен выполнять по очереди все работы, а не одну какую-нибудь; в) все произведённые на местности измерения записываются и дома к следующему уроку обрабатываются; г) инструменты, полученные из школы для работы, сдаются звеньевым и доставляются в школу в целости.

Учитель сообщает учащимся цель (тему) практической работы на местности.

На местности учитель даёт задание: измерить расстояние между двумя какими-нибудь предметами, находящимися на расстоянии около 40 *м*.

Для того чтобы измерить расстояние, надо предварительно провешить прямую. Это задание даётся одному звену. Оно выполняет его по тем правилам, которые были сообщены по этому вопросу на уроке. Через каждые 10 *м* ставятся вешки: всего будет поставлено 5 вешек, считая в том числе начальную и конечную вешки.

Второе звено производит измерение провешенной линии.

Учитель подробно инструктирует учеников, как надо производить измерения мерной верёвкой или цепью.

Двое учащихся берут концы мерной верёвки и идут вдоль провешенной линии, считая, сколько раз мерная верёвка уложится на измеряемой прямой. Идущий впереди имеет в руках некоторый запас колышков. Идущий сзади надевает конец мерной верёвки на вбитый в землю колышек, а идущий впереди идёт вдоль провешенной прямой до тех пор, пока верёвка не натянется, и вбивает в землю колышек у конца верёвки.

Затем оба учащихся снимают верёвку с колышков, идущий сзади вытаскивает колышек, и оба идут дальше до того момента, пока идущий сзади не дойдёт до колышка, не наденет на него свой конец верёвки. И так продолжается до тех пор, пока передний не дойдёт до конца.

Когда расстояние будет измерено, через каждые 10 *м* будет вбит в землю колышек, работа считается законченной.

Другие звенья практикуются в измерении тех линий, которые на местности уже отмечены: измерение длины здания вдоль его стены, измерение длины дорожки в саду или грядки в огороде — по краю дорожки или грядки — и т. д.

На дом даётся задание: начертить провешенную в поле прямую линию в масштабе 5 *м* в 1 *см* с указанием поставленных на ней вешек и колышков. Даётся условное обозначение вешки, колышка.

2. Определение расстояний шагами и на глаз. Измерение расстояний на местности производится не только мерной верёвкой, рулеткой или землемерной цепью, но в некоторых случаях, и в особенности в боевой обстановке, оно производится и шагами, и на глаз. Хороший глазомер нужен и военному, и колхознику, и землемеру, и каждому человеку в жизни. Поэтому учащиеся начальной школы должны приобретать эти навыки.

Существует таблица примерной различаемости предметов на различных расстояниях. Однако пользоваться этой таблицей в начальной школе преждевременно. Здесь целесообразно практиковаться в определении сравнительно небольших расстояний, не выходящих за пределы 400 *м*. Никакой теории этого вопроса (различаемость предметов в зависимости от освещённости, от метеорологических условий, от наличия промежуточных предметов и т. д.) сообщать не следует. Здесь всё дело в практике, в тренировке, в восприятии отмеренных расстояний и в проверке своих предположений непосредственными измерениями. Особенно важно уметь правильно определять расстояния в 25—50 *м* (дистанции стрельбы из мелкокалиберной винтовки), в 100 *м* (длина и ширина квадратного гектара), 400 *м* (дистанция действительного ружейного огня).

Каждый учащийся должен измерить длину своего шага и запомнить её, записав в тетрадь. При измерении расстояний шагами последние должны быть обыкновенные, средние, не следует нарочито увеличивать шаг. Счёт шагов ведут обычно парами под левую ногу.

Второй выход в поле должен быть посвящён этим двум вопросам — определению расстояний на глаз и определению размера шагов и расстояний шагами.

На местности упражнение в определении расстояний проводится примерно так:

Провешивается прямая в 100 *м* длиной. Все учащиеся собираются у начальной вешки, а затем один учащийся идёт вдоль провешенной линии и останавливается на некоторое время на расстоянии 10 *м*, на расстоянии 20 *м*, 50 *м*, 80 *м* и 100 *м*.

Все остальные учащиеся наблюдают, во-первых, пройденные отрезки и, во-вторых, лицо и всю фигуру удаляющегося ученика: видны ли его глаза, белки глаз, выражение лица.

После этого учитель предлагает учащимся определить расстояние до различных предметов на данной местности: до дороги, до колхозных конюшен, до кустов, до того или иного отдельного дерева и т. д. Ученики опрашиваются; против фамилии опрашиваемых учеников по списку ставится названное ими число метров. После этого двум учащимся предлагается измерить это расстояние мерной верёвкой или рулеткой.

Те учащиеся, у которых разность между названным числом метров и действительным будет наименьшей, считаются имеющими лучший глазомер.

А вообще глазомер считается отличным, если учащийся допускает ошибку не свыше 10% в ту или другую сторону, и хорошим, если ошибка не свыше 20%.

Для определения размера шага учащиеся на ровном месте отмечают расстояние в 10 *м* (можно в 50 *м* или 100 *м*). Каждый учащийся три раза отмеривает это расстояние шагами и делает записи у себя в тетради: 1-й раз — 15 шагов, 2-й раз — 16 шагов, 3-й раз — 17 шагов. В сумме получается $15 + 16 + 17 = 48$ (шагов), а в среднем $48 : 3 = 16$ (шагов).

Ученик делает запись: «На 10 *м* у меня приходится 16 шагов». Это число ученик должен запомнить. У каждого будет свой результат. После этого ученик составляет такую табличку:

На 100 *м*	у меня	приходится	160	шагов
На 200 *м*	»	»	320	»
На 300 *м*	»	»	480	»
На 400 *м*	»	»	640	»
На 500 *м*	»	»	800	»
На 1000 *м*	»	»	1 600	»

Знание числа шагов, приходящихся на 10 или 100 *м*, даёт возможность измерять расстояния.

Пусть, например, ученик, у которого на 10 *м* приходится 16 шагов, насчитал от школы до своего дома 806 шагов. Сколько это составит метров?

1) 806 ш. : 16 ш. = 50 (ост. 6 ш.)
2) 10 *м* × 50 = 500 *м*
3) 6 шаг. = 4 *м*
4) 500 *м* + 4 *м* = 504 *м*

Значит, расстояние от школы до дома $\frac{1}{2}$ километра.

3. **Построение на местности прямого угла, ара и гектара.** Это третья по порядку работа, связанная с выходом в поле. В порядке подготовки к ней в классе нужно познакомить учащихся с эккером. Необходимо изготовить самодельный эккер.

На квадрате, вырезанном из фанеры, проводятся две взаимноперпендикулярные прямые, на концах которых вбиваются вертикально гвозди или булавки.

На уроке учитель демонстрирует эккер и объясняет применение его для решения задачи: построить на местности прямой угол с вершиной в данной точке. Зачем приходится строить прямые углы — это объясняется на жизненных примерах: на примере закладки фундамента для постройки здания, на примере разбивки огорода, сада и т. д.

Для построения прямого угла на местности эккер устанавливается в данной точке так, чтобы одна прямая находилась в желаемом направлении. После этого провешиваются две линии по направлению линий эккера; они-то и составят прямой угол.

Перед выходом на местность ученики должны приготовить: 1) эккер, 2) 12 вешек, 3) мерную верёвку, 4) 8—10 колышков.

На местности учащимся даётся конкретная задача: наметить фундамент для какого-либо здания прямоугольной формы. Даётся длина и ширина здания и их направление

Ученики намечают линию длины здания и обозначают её концы двумя вехами. Дальше нужно наметить линию ширины, проведя её под прямым углом к длине. Возникает необходимость построить прямой угол.

Для этого пользуются эккером. Веху в намеченной вершине прямого угла снимают и заменяют её эккером. Эккер устанавливают таким образом, чтобы направление, допустим АВ, совпало с направлением на веху, поставленную в другом конце данной линии. Этого достигают, смотря по направлению одной прямой эккера. Установив правильно положение эккера, учащийся смотрит по направлению линии (*CD*) эккера, а второй учащийся идёт в этом направлении и ставит третью веху. Направление на неё перпендикулярно к направлению линии длины и, следовательно, на поверхности земли получится прямой угол.

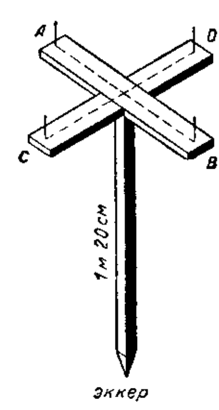


Рис. 82.

Второе звено может построить уже с большей долей самостоятельности прямой угол на другом конце линии длины здания.

Следующей работой будет построение а р а, который носит популярное в народе название «сотка» (сотая часть гектара). Площадь, равная 1 ару, отмеривается в виде квадрата со стороной, равной 10 *м*. Измерение сторон производится мерной 10-метровой верёвкой; прямые углы в вершинах строятся с помощью эккера.

В вершинах полученного квадрата ставятся вешки. Отмерив ар, учащиеся обозревают его и получают наглядное представление о его величине.

Работа по построению на местности г е к т а р а выполняется так же, как и предыдущая,— с помощью мерной верёвки и эккера. Построенный на местности гектар должен иметь форму квадрата со стороной, равной 100 *м*. В вершинах квадрата и в серединах сторон ставятся вешки.

Второму звену можно дать задание построить гектар в виде прямоугольника со сторонами 200 *м* и 50 *м*, поставив вешки через каждые 50 *м*.

На дом даётся задание начертить ар в масштабе 1 *м* в 1 *см*.

4. Измерение площади участка, имеющего вид прямоугольника. Учитель должен выбрать подходящий участок накануне и отметить его какими-нибудь вешками или колышками. Можно взять также участок, ограниченный изгородью, забором или канавой, если только эти границы прямолинейны.

Работа учащихся, разбитых на звенья, будет состоять в следующем:

а) проверить прямолинейность каждой стороны участка путём провешивания прямой по границе участка или вдоль неё, если границей служит забор или канава;

б) проверить эккером прямые углы в вершинах;

в) измерить мерной верёвкой длину и ширину участка в метрах;

г) записать размеры участка в тетради и вычислить его площадь в квадратных метрах.

Размер участка может быть около $^1/_2$ *га*.

Этими работами и заканчиваются измерительные работы на местности в начальной школе.

ОГЛАВЛЕНИЕ